

Vesa Välimäki

**HUILUN ÄÄNEN SYNTEESI
LASKENNALLISEN MALLIN AVULLA**

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi
diplomi-insinöörin tutkintoa varten Espoossa 8.12.1992

Työn valvoja

Matti Karjalainen

Matti Karjalainen

~~TKK SÄHKÖTEKNIIKAN
OSASTON KIRJASTO
OTAKAARIKATU
02150 ESPOO~~

11014

Tekijä:	Vesa Välimäki		
Työn nimi:	Huilun äänen synteesi laskennallisen mallin avulla		
Päivämäärä:	6.12.1992	Sivumäärä:	109
Osasto:	Sähkötekniikan osasto		
Professuuri:	Tkl-89 Akustiikka ja äänenkäsittelytekniikka		
Työn valvoja:	Professori Matti Karjalainen		
<p>Tässä työssä on laadittu laskennallinen malli huilun toimintaperiaatteesta. Malli perustuu huilun akustiikkaan ja se soveltuu reaaliaikaiseen äänisynteesiin. Mallin laatimiseen käytetty menetelmä on aaltojohtomallinnus, joka on tehokas yksiulotteisten resonaattorien simulointiin sopiva tekniikka.</p> <p>Työssä on tarkasteltu yksiulotteisten resonaattoreiden, kuten värähtelevän kielien ja kapean akustisen putken, ominaisuuksia ja mallintamista. Keskeisimmät soittimien äänen synteisiin käytetyt perinteiset menetelmät esitellään lyhyesti, kuten myös nykyään tunnetut soittimien fysikaaliseen mallintamiseen soveltuvat menetelmät. Aaltojohtomallintamisen teoriaa esitellään tarkemmin, koska sillä on oleellinen osuus huilun laskennallisessa mallissa. Erityisesti paneudutaan akustisen putken aaltojohtomalliin ja simuloidun aaltojohdon pituuden säätämiseen digitaalisuotimien avulla.</p> <p>Huilun akustiikka esitellään perinpohjaisesti. Myös uusimpia tutkimustuloksia mainitaan. Laskennallinen malli perustuu huilun akustiikkaan, mutta fysikaalisia periaatteita on pyritty yksinkertaistamaan, jotta malli olisi mahdollisimman yksinkertainen. Keskeinen tavoite on ollut laatia malli, jonka voisi ohjelmoida nykyaikaisella kaupallisella signaaliprosessorilla ja joka toimisi tällöin tosiajassa eli synteettistä ääntä voitaisiin kuunnella laskennan aikana. Työssä esitellyn kaltaisilla soitinmalleilla oletetaan tulevaisuudessa olevan runsaasti käyttöä tietokonemusiikin alalla.</p>			
Avainsanat: digitaalinen signaalinkäsittely, huilun akustiikka, musiikkiakustiikka, soittimien mallintaminen, tietokonemusiikki, äänisynteesi			

Author:	Vesa Välimäki		
Name of the thesis:	Sound synthesis of the flute by means of a computational model		
Date:	6.12.1992	Number of pages:	109
Faculty:	Electrical Engineering		
Professorship:	Tkl-89 Acoustics and audio signal processing		
Supervisor:	Professor Matti Karjalainen		
<p>In this work, a computational model of the flute has been developed. The model is based on the acoustics of the flute and it is suitable for real-time sound synthesis.</p> <p>The basic principles of one-dimensional resonators, like a vibrating string and a narrow acoustic tube, are discussed. The most important traditional techniques for sound synthesis and also modern methods for physical modeling of musical instruments are introduced. The theory of waveguide modeling and especially the waveguide model of an acoustic tube are discussed thoroughly. In addition, it is shown how the length of the simulated acoustic tube can be controlled using digital filters.</p> <p>The acoustics of the flute are examined carefully and the most recent scientific results are referred to. Although the computational model is based on the acoustics of the flute, the physical principles have been simplified in order to make the model as efficient as possible. The aim of this study has been to develop a model that could run in real-time on a commercial signal processor. In the future, models like the one introduced in this work are supposed to have several applications in the field of computer music.</p>			
Keywords: acoustics of the flute, computer music, digital signal processing, modeling of musical instruments, musical acoustics, sound synthesis			

ALKULAUSE

Diplomityöni ohjaaja professori Matti Karjalainen on jatkuvasti suunnitellut työtä kanssani ja opastanut minua etsimään itsenäisesti tarvitsemaani tietoa. Erityisesti haluan osoittaa hänelle kiitokset siksi, että hän ohjasi minut tämän kiinnostavan työn pariin.

Sydämelliset kiitokseni ansaitsee TkT Timo Laakso, joka käsikirjoitukseni luettuaan antoi runsaasti hyviä neuvoja ja auttoi minua selvittämään sekä ajatuksiani että laatimaani tekstiä. Minulla on ollut mahdollisuus käydä hedelmällisiä keskusteluja työni yksityiskohdista dosentti, TkT Unto K. Laineen, DI Juha Backmanin ja TkT Paavo Alkun kanssa. Heidän asiantuntemuksestaan on ollut minulle korvaamatonta hyötyä. Muita TKK:n akustiikan laboratoriossa työskenteleviä henkilöitä kiitän miellyttävästä työympäristöstä.

Tunnustuksen ansaitsee unkarilainen työtoverini Jánosy Zoltán, joka on työskennellyt TKK:n akustiikan laboratoriossa useana kesänä ja laatinut tietokoneohjelmia soitinmallien ohjaukseen. Hänen kanssaan olen vapautuneesti vaihtanut ajatuksia kaikista huilun mallintamiseen liittyvistä seikoista.

Olen tehnyt suurimman osan diplomityöhöni liittyvästä tietokoneohjelmoinnista Espoon taide- ja tietotekniikkakeskuksen CARTESin tiloissa, missä minun käyttööni on ollut varattuna tietokone sekä työhuone. Erityisen kiitollinen olen CARTESin johtajalle, säveltäjä Otto Romanowskille hänen innostuneen myöntämielisestä asenteestaan työtäni kohtaan. Kiitän kaikkia CARTESissa työskenteleviä henkilöitä hauska seurasta ja tekniikan ylioppilas Erkka Suomista lisäksi sen vuoksi, että hän ystävällisesti auttoi minua tekstinkäsittely- ja sivuntaitto-ohjelmien käytössä viimeistellessäni käsikirjoitustani.

Vanhempiani kiitän heiltä saamastani taloudellisesta ja henkisestä tuesta.

Diplomityöni on osa Suomen Akatemian rahoittamaa projektia "Musiikkiteknologian signaalinkäsittelymenetelmien kehittäminen".

Helsingissä 6. joulukuuta 1992



Vesa Välimäki

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO	1
2 SOITTIMIEN AKUSTIIKKA	3
2.1 Soittimien yleisiä ominaisuuksia	3
2.1.1 Soittimien luokittelu herätteen mukaan	3
2.1.2 Moodilukittuminen	4
2.2 Yksiulotteiset resonaattorit	5
2.2.1 Aaltoyhtälö ja sen yleinen ratkaisu	5
2.2.2 Kielessä etenevä aalto	6
2.2.3 Seisovat aallot värähtelevässä kielessä	8
2.2.4 Pitkittäinen aaltoliike putkessa	9
2.2.5 Heijastuminen, säteily ja päätykorjaus putkessa	10
2.3 Moniulotteiset resonaattorit	12
2.3.1 Kaksiulotteiset resonaattorit	12
3 SOITTIMIEN ÄÄNEN SYNTEESI JA FYSIKAALINEN MALLINTAMINEN	13
3.1 Perinteiset äänisynteesimenetelmät	13
3.1.1 Vähentävä synteesi	15
3.1.2 Aaltomuotoilu	17
3.1.3 Perinteisten synteesimenetelmien rajoituksista	19
3.2 Fysikaalisen soitinmallinnuksen periaatteet	21
3.2.1 Aaltoliikemallinnus	22
3.2.2 Elementtimenetelmä	23
3.2.3 Moodisynteesi	25
4 AALTOJOHTOMALLINNUS	27
4.1 Aaltojohtomallinnuksen fysikaalinen tausta	27
4.1.1 Akustisen aaltojohdon perussuureet	27
4.1.2 Heijastusfunktio	29
4.1.3 Impulssivasteen ja heijastusfunktion suhde	30
4.2 Jatkuvan järjestelmän aikadiskreetti mallintaminen	32
4.2.1 Homogeenisen aaltojohdon aikadiskreetti malli	32
4.2.2 Impulssi-invariantti menetelmä	33
4.2.3 Bilineaarimuunnos	34
4.3 Värähtelevän kielen mallintaminen	36
4.3.1 Karplus-Strong -algoritmi	36

4.3.2	Värahtelevän kielen aaltojohtomalli	38
4.4	Akustisen putken mallintaminen	40
4.4.1	Tilavuusnopeuden sironta putken epäjatkuvuuskohdassa	41
4.4.2	Äänipaineen sironta putken epäjatkuvuuskohdassa	43
4.4.3	Homogeenisen putken aaltojohtomalli	44
4.4.4	Sivuhaaran kytkeytyminen aaltojohtoon	46
4.5	Mielivaltaisen pituisen putken mallintaminen	49
4.5.1	Murtoviipeen approksimointi Lagrange-interpolaattorilla	49
4.5.2	Murtoviipeen approksimointi kokopäästösuotimella	53
4.5.3	Lagrange-interpolaattorin ja kokopäästösuotimen vertailu	56
4.5.4	Lagrange-interpolaattoriin perustuva murtoviivesuodin	58
5	HUILUN RAKENNE JA TOIMINTA	60
5.1	Huilusoittimet	60
5.2	Nykyaikainen poikkihuilu	61
5.2.1	Valmistusmateriaalit	62
5.2.2	Suukappale	62
5.3	Ilmasuihkun dynamiikka	65
5.3.1	Ilmasuihkun käyttäytyminen	65
5.3.2	Poikittainen aaltoliike ilmasuihkussa	66
5.3.3	Ilmasuihkun aiheuttama epälineaarisuus	67
5.4	Huilun äänentuottomekanismi	69
5.4.1	Huilun toiminnan lineaarinen tarkastelu	70
5.4.2	Ilmasuihkun admittanssi	71
5.4.3	Herätteen ja resonaattorin vaihesuhteet	71
5.5	Sormiaukot ja huilun äänen säteily	72
5.5.1	Suljetut sormiaukot	72
5.5.2	Avoimet sormiaukot ja putken pituuden päätykorjaus	74
5.5.3	Putken avoimen pään säteilyimpedanssi	75
5.5.4	Huilun äänen säteilykuvioista	77
5.6	Huilun rungon mallintamisesta	77
5.6.1	Benaden malli	77
5.6.2	Akustiset energiahäviöt putkessa	77
5.7	Huilun soiton akustiikkaa	79
5.7.1	Soittajan säätelemät parametrit	79
5.7.2	Moodien siirtymät ja ylipuhallus	80
6	HUILUN LASKENNALLINEN MALLINTAMINEN	82
6.1	Huilun laskennallinen malli	82
6.2	Herätteen ja resonaattorin kytkennän malli	83
6.2.1	Huilun mallin äänentuottomekanismi	83
6.2.2	Signaalin vakiokomponentin poistaminen	85
6.3	Huilun rungon mallintaminen	85

6.3.1	Rungon aaltojohtomalliin liittyvät fysikaaliset oletukset	85
6.3.2	Putken avoimen pään säteilyimpedanssin mallintaminen	86
6.3.3	Putken avoimen pään laskennallinen	87
6.3.4	Laineen yksinkertaistettu säteilyimpedanssimalli	89
6.3.5	Putken seinämien häviöiden mallintaminen	90
6.4	Sormiaukkojen mallintaminen	90
6.4.1	Suljetut sormiaukot	90
6.4.2	Avoimet sormiaukot ja mallin virittäminen	91
6.5	Mallin soveltaminen muihin puhallinsoittimiin	91
6.5.1	Muut huilusoittimet	91
6.5.2	Muut puupuhaltimet	92
6.6	Huilun ja mallin vertailu	92
7	MALLIN TOTEUTUS	95
7.1	Signaaliprosessorit	95
7.1.1	TMS320C30-signaaliprosessori	96
7.2	QuickC30-signaalinkäsittelyjärjestelmä	96
7.2.1	Oliopohjainen ohjelmointi	97
7.2.2	Lisp-assembler	98
7.3	Huilun mallin oliopohjainen toteutus	98
7.3.1	Luokkamäärittelyt	98
7.3.2	Makrometodit	99
7.3.3	Mallin toteuttava signaalinkäsittelyjärjestelmä	100
8	YHTEENVETO	101
8.1	Jatkosuunnitelmia	101
8.2	Soitinmallien mahdollisia sovelluskohteita	102
8.2	Soitinmallinnus — signaalinkäsittelyn ja akustiikan uusi tutkimusala	102
	LÄHDELUETTELO	104
	LIITTEET	
A	Interpolaattorien kertoimien päivitys	A1
A.1	Lagrange-interpolaattorien kertoimien päivitys	A1
A.2	Kokopäästösuotimen kertoimien päivitys	A2
B	Huilun laskennallisissa mallissa tarvittavia digitaalisuotimia	B1
B.1	Aikadiskreetti differentiaattori	B1
B.2	Aikadiskreetti integraattori	B3
B.3	Ensimmäisen asteen IIR-suodin	B4
C	Kohinan ja siniaallon tuottaminen	C1
C.1	Kohinan generointi	C1
C.2	Sinisignaalin synteesi	C2

SYMBOLILUETTELO

Symboli	Nimitys	Yksikkö
A	Pinta-ala	m^2
c	Äänen nopeus	m/s
f	Taajuus tai funktio	Hz
F	Voima	N
F	Muotoilufunktio (aaltomuotoilun yhteydessä)	-
$g(t)$	Greenin funktio eli aikajatkuva impulssivaste	-
h	Akustinen poikkema	m^3
$h(n)$	Diskreettiaikainen impulssivaste	-
$H(z)$	Siirtofunktio z -tasossa	-
j	Imaginaariyksikkö ($j = (-1)^{1/2}$)	-
k	Aaltoluku ($k = 2\pi/\lambda$)	$1/\text{m}$
L	Pituus	m
$L_n(x)$	Lagrange-polynomi	-
p	Äänipaine	Pa
q	Tilavuusnopeus	m^3/s
$r(t)$	Heijastusfunktio (aika-alueessa)	-
$R(\omega)$	Heijastusfunktio (taajuusalueessa)	-
$s(n)$	Aikadiskreetti signaali	-
$T(x)$	Tsebysev-polynomi	-
u	Hiukkasnopeus	m/s
v	Nopeus	m/s
V	Tilavuus	m^3
Z	Akustinen impedanssi	Ω_A (akustinen ohmi)
Z_0	Aaltojohdon akustinen impedanssi	Ω_A
Z_m	Mekaaninen impedanssi	Ns/m
z_r	Normalisoitu säteilyimpedanssi	-
Y	Akustinen admittanssi eli impedanssin käänteisluku	$1/\Omega_A$
δ	Diracin deltafunktio eli ideaalinen impulssi	-
ρ	Ilman tiheys	kg/m^3
ω	Kulmataajuus ($\omega = 2\pi f$)	rad
τ	Viive	s
τ_g	Ryhmäviive	s
τ_v	Vaiheviive	s

1 JOHDANTO

Esiteltävässä työssä on laadittu laskennallinen malli poikkihuilusta. Malli on huomattavan tehokas ja sillä voidaan tuottaa nopean tietokoneen avulla synteettistä ääntä tosiajassa, toisin sanoen laskennan aikana.

Kyseessä on uudenlainen lähestymistapa soittimien äänen synteesiin. Perinteiset äänisynteesimenetelmät, joita myös kaupallisissa äänisyntetisaattoreissa käytetään, eivät pyri jäljittelemään akustisten soittimien toimintaperiaatetta, vaikka niillä usein yritetään jäljitellä soittimien ääntä. Toisaalta samplerit, joihin on tallennettu aidon soittimen ääntä, tuottavat täysin oikealta kuulostavaa, mutta aina samanlaista ääntä. Fysikaalisen mallin avulla voidaan laatia äänisyntetisaattori, jonka äänentuottoperiaate matkii jotakin soitinta. Tällä tavoin voidaan tuottaa ääntä, joka käyttäytyy aivan kuten todellisen soittimen.

Menetelmä on tullut mahdolliseksi soittimia koskevan tutkimuksen edistyessä. Monien soittimien, kuten kieli- ja joidenkin puhallinsoittimien, akustiikka tunnetaan nykyään riittävän hyvin, jotta voidaan laatia niiden toimintaa simuloivia laskennallisia malleja. Toisaalta esimerkiksi kaksoisruokosoittimien äänentuottomekanismia ei edelleenkään täysin ymmärretä. Tämän ei pidä hämmästyttää, sillä akustiset soittimet lienevät mutkikkaimpia ihmisten jokapäiväisessä käytössä olevia mekaanisia laitteita.

Aiemmin kirjallisuudessa esitetyt soittimien fysikaaliset mallit ovat olleet matemaattisia malleja, jotka kuvaavat mahdollisimman tarkasti värähtelyaaltojen etenemisen soittimessa. Reaaliaikaiseen äänisynteesiin mainitut mallit eivät sovellu, sillä niihin liittyvä laskenta on liian vaativaa nykyisille tietokoneille. Vuonna 1983 McIntyre, Woodhouse ja Schumacher esittivät kuinka soittimien ääntä voidaan yksinkertaisesti tuottaa laskemalla erikseen eri suuntiin etenevät ääniaallot (McIntyre *et al.* 1983). He ymmärsivät, että soittimen eri osien heijastusfunktioiden avulla järjestelmä voidaan kuvata tehokkaammin kuin jäljittelemällä soittimen impulssivastetta. Samana vuonna Alex Strong ja Kevin Karplus julkaisivat 1970-luvun lopulla keksimänsä erittäin yksinkertaisen äänisynteesimenetelmän, joka perustui itseään modifioivaan aaltotaulukkoon. Stanfordin yliopistossa Julius Smith oivalsi Karplusin ja Strongin menetelmän olevan erikoistapaus yksiulotteisen aaltoliikkeen etenemisen yleisestä mallista (Jaffe ja Smith 1983). Näistä pioneerisaavutuksista lähtien useissa yliopistoissa ja tutkimuslaitoksissa erityisesti Yhdysvalloissa ja Ranskassa on kehitetty äänisynteesiin soveltuvia soitinmalleja.

Yksiulotteisen aaltoliikkeen malliin eli siirtolinjaperiaatteeseen perustuvia ihmisen ääniväylän fysikaalisia malleja on laadittu 1960-luvun alusta lähtien. Yksi siirtolinjoihin perustuvien eli artikulatoristen puhesyntetisaattoreiden suurimmista ongelmista on tarve muuttaa mallin parametrejä jatkuvasti. Siirtolinja on luonteeltaan staattinen, mutta ääniväylän muoto muuttuu jatkuvasti. Staattisuutensa vuoksi siirtolinja soveltuukin helpommin soittimien yksiulotteisen resonaattorin mallintamiseen. Esimerkiksi puhallinsoittimien resonaattorin ominaisuudet muuttuvat ainoastaan sormitusta vaihdettaessa, ja silloin muutoksen voidaan olettaa tapahtuvan nopeasti eikä hitaasti kuten ääniväylän tapauksessa.

Soitinmallien käyttö tietokonemusiikissa on nyt tullut mahdolliseksi nopeiden signaaliprosessoreiden ansiosta. Viime aikoina signaaliprosessorit ovat kehittyneet riittävän tehokkaiksi pystyäkseen simuloimaan yksinkertaisia fysikaalisia soitinmalleja reaaliajassa. Tämän merkittävän saavutuksen jälkeen lähitulevaisuudessa voidaan keskittyä mallien äänenlaadun parantamiseen. Luultavasti soittimien fysikaaliset mallit kehittyvät jatkossa nopeasti nimenomaan tietokoneiden laskentatehon huikean kehityksen innoittamina.

2 SOITTIMIEN AKUSTIIKKA

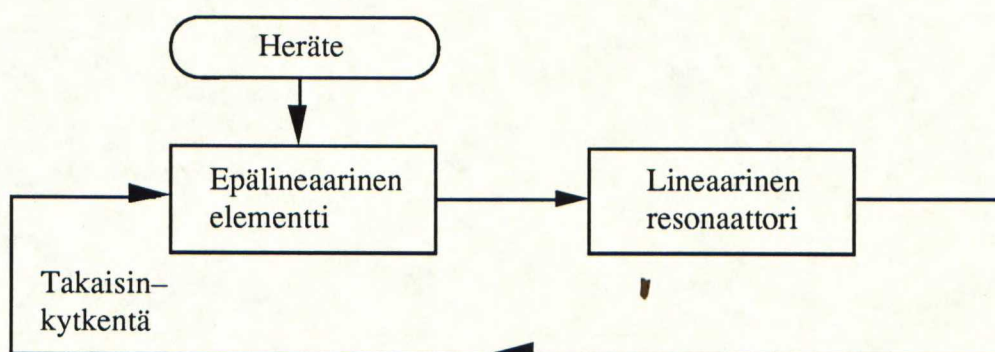
2.1 Soittimien yleisiä ominaisuuksia

2.1.1 Soittimien luokittelu herätteen mukaan

Soittimet voidaan jakaa niiden herätteen tyypin mukaan kahteen luokkaan (Fletcher ja Rossing 1991):

- 1) *impulssiherätteiset* soittimet
- 2) *itseherätteiset* (engl. self-excited) soittimet

Useimmat lyömäsoittimet sekä näppäiltävä kieli kuuluvat ensimmäiseen ryhmään. Ne vaativat muuttuvan herätteen. Tällöin soittimen äänen alussa erottuu lyhyt hälyääni ja sointi vaimenee vähitellen. Impulssiherätteiset soittimet ovat luonteeltaan häviöllisiä. Niiden resonaattori saattaa olla lähes lineaarinen, kuten kitaran kieli, tai voimakkaasti epälineaarinen, kuten monissa metallisissa lyömäsoittimissa.



Kuva 2.1 Itseherätteisen soittimen yleinen lohkokaavio.

Jousella soitettavat kielisoittimet sekä puhallinsoittimet kuuluvat toiseen luokkaan. Kuvassa 2.1 on esitetty itseherätteisen soittimen yleinen lohkokaavio (McIntyre *et al.* 1983). Heräte on *jatkuva* ja usein *vakio* eikä siten välttämättä sisällä jaksollista komponenttia soittimen perustaajuudella. Epälineaarinen elementti kuvaa *herätteen ja resonaattorin kytkentää*, joka voi olla esimerkiksi jokin seuraavista:

- viulun jousi ja kieli,

- klarinetin ruokokieli ja putki,
- kaksoisruokosoittimien ruoko ja putki sekä
- huilusoittimen ilmasuihku ja putki.

Itseherätteisten soittimien herätteen ja resonaattorin kytkentä on yleensä *vahvasti epälineaarinen*, mihin näiden soittimien äänentuottomekanismi perustuukin.

Puhallinsoittimissa soittimen runko toimii resonaattorina ja se voidaan yleensä olettaa lineaariseksi. Jousisoittimissa sekä kieli että kaikukoppa ovat resonaattoreita. Itseherätteisten soittimien toiminnan kannalta on olennaista, että resonaattorin tila vaikuttaa herätteen ja resonaattorin kytkeytymiseen epälineaarisuuden välityksellä. Tätä kuvataan takaisinkytkennällä kuvassa 2.1.

2.1.2 Moodilukittuminen

Itseherätteisten akustisten soittimien tuottama äänisignaali on *jaksollinen*, kun jätetään huomiotta vibrato ja herätteen satunnaisvaihteluista johtuvat ilmiöt (Fletcher 1978). Jaksollisen signaalin spektri on välttämättä harmoninen, joten itseherätteen soittimen moodit ovat soittotilanteessa kokonaislukusuhteessa keskenään. Epäharmonisen resonaattorin moodien muuttumista harmonisiksi kutsutaan nimellä *moodilukittuminen* (engl. mode-locking). Ilmiöön liittyvät sekä ylä-äänesten taajuuksien että niiden välisen vaihesuhteiden lukkiutuminen perustaajuuteen.

Monimoodisten resonaattorien (engl. multi-mode systems) moodit eivät koskaan ole tarkalleen kokonaislukusuhteessa keskenään, sillä *täsmälleen harmonisia järjestelmiä ei ole olemassa*. Esimerkiksi värähtelevän kielen ylemmät moodit ovat hiukan yläreisiä *kielen jäykkyyden* ansiosta. Resonaattoriputken harmonisten viritykseen vaikuttaa putken avoimen pään lähellä värähtelevä ilmamassa eli *takertunut massa*. Siitä johtuva putken efektiivisen pituuden muutos eli *päätykorjaus* (engl. end correction) riippuu taajuudesta. Siksi resonaattoriputki on pienien taajuuksien kannalta lyhyempi kuin suurien, mikä aiheuttaa ylempien harmonisten epävireisyyden.

Lähes harmonisen resonaattorin moodien taajuudet f_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) voidaan esittää seuraavasti (Fletcher 1978):

$$f_i = i f_0 + \delta_i \quad (2.1)$$

missä f_0 on resonaattorin perustaajuus ja δ_i on i :nnen harmonisen taajuuden poikkeama perustaajuuden kokonaislukukerrannaisesta. Tarkastellaan esimerkkinä resonaattoria, jolla on kaksi moodia, f_m ja f_n , joiden suhde voidaan likimain esittää kahden pienen kokonaisluvun m ja n avulla:

$$m f_n \approx n f_m \quad (2.2)$$

Ehto moodilukittumiselle on, että on olemassa sellaiset vaihefunktiot ϕ_m ja ϕ_n , että pätee (Fletcher 1978):

$$m \left(f_n + \frac{d\phi_m}{dt} \right) = n \left(f_m + \frac{d\phi_n}{dt} \right) \quad (2.3)$$

Tarkastelu voidaan yleistää myös järjestelmille, joilla on useampia moodeja. Monimoodisen järjestelmän soiva perustaajuus on moodilukittumisen jälkeen kompromissi, johon vaikuttavat kaikki resonaattorin moodit (Fletcher ja Rossing 1991). Herätteen amplitudia muutettaessa harmonisten suhteellinen vaikutus moodilukittumiseen muuttuu ja samalla myös soiva perustaajuus suurenee tai pienenee. Tämä on yksi syy siihen, että soittimien sävelkorkeus muuttuu äänenvoimakkuuden mukana.

Fletcher (1978) on luetellut moodilukittumista edesauttavia seikkoja:

- Kokonaislukujen m ja n , jotka määrittävät moodien välisen suhteen, on oltava pieniä ($m + n < 4$);
- Resonaattorin alkuperäisten moodien f_i on oltava lähes harmonisia;
- Herätteeseen liittyvän epälineaarisuuden on oltava erittäin huomattava;
- Moodien amplitudin on oltava suuri.

Toisaalta moodilukittumista estävät varsinkin moodien voimakas epäharmonisuus ja herätteen pieni amplitudi.

Kun epälineaarisesti herätetyn resonaattorin moodit ovat hetkellisesti päässeet harmonisiin suhteisiin, säilyy moodilukittuminen helposti (Fletcher 1978). Moodilukittuminen tapahtuu tavallisesti nopeimmin, mikäli resonaattoria herätetään sen perustaajuudella (Fletcher ja Rossing 1991).

2.2 Yksiulotteiset resonaattorit

Yksiulotteiset resonaattorit voidaan jakaa aaltoliikkeen värähtelysuunnan mukaan *poikittaisiin* ja *pitkittäisiin* värähtelijöihin. Poikittaisissa värähtelijöissä aaltoliikkeen suunta on suorassa kulmassa aallon etenemissuunnan kanssa. Klassinen esimerkki poikittaisesta yksiulotteisesta resonaattorista on värähtelevä kieli. Myös pitkä ja ohut värähtelevä tanko, jota tavataan ksylofonissa, marimbassa ja vibrafonissa, on poikittainen yksiulotteinen värähtelijä. Puhallussoittimien kapeassa rungossa etenee pitkittäinen aaltoliike, joka ilmenee ilmanpaineen tihtyminä ja harventumina. Värähtelysuunta ja etenemissuunta ovat samat. Myös vapaasti ilmassa etenevä ääni on pitkittäistä aaltoliikettä. Missään fluidissa ei voi ilmetä taivutusjännityksiä ja siksi niissä voi edetä vain pitkittäinen aalto.

2.2.1 Aaltoyhtälö ja sen yleinen ratkaisu

Kolmiulotteisessa tilassa etenevä ääniaalto voidaan esittää toisen asteen osittais-differentiaaliyhtälöllä, jota kutsutaan *aaltoyhtälöksi* (Fletcher ja Rossing 1991):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 p \quad (2.4)$$

missä p on äänipaine, t aika ja c äänennopeus. Osittaisderivointioperaattori ∇ (nabla) voidaan määritellä mielivaltaisessa koordinaatistossa. Yhtälö (2.4) on aaltoyhtälön linearisoitu muoto, josta on jätetty pois äänipaineen p epälineaarisuutta kuvaavat termit olettaen, että äänipaine on paljon pienempi kuin staattinen ilmanpaine. Musiikkiakustikassa aaltoyhtälön linearisoitua muotoa voidaan huoleti käyttää.

Yksiulotteiselle poikittaiselle aaltoliikkeelle voidaan johtaa aaltoyhtälö poikkeaman y suhteen suorakulmaisessa koordinaatistossa (Fletcher ja Rossing 1991):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

Ranskalainen matemaatikko d'Alembert (1717–1783) on esittänyt aaltoyhtälölle yleisen ratkaisun:

$$y(t, x) = f_1(ct - x) + f_2(ct + x) \quad (2.6)$$

missä funktiot f_1 ja f_2 ovat mielivaltaisia jatkuvia funktioita. Funktio $f_1(ct - x)$ edustaa x -akselin positiiviseen suuntaan nopeudella c etenevää aaltoa ja $f_2(ct + x)$ puolestaan negatiiviseen suuntaan samalla nopeudella etenevää aaltoa.

Haluttaessa tutkia harmonisen aaltoliikkeen etenemistä kannattaa funktiot f_1 ja f_2 valita sinimuotoisiksi:

$$y(t, x) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(\omega t + kx)} \quad (2.7)$$

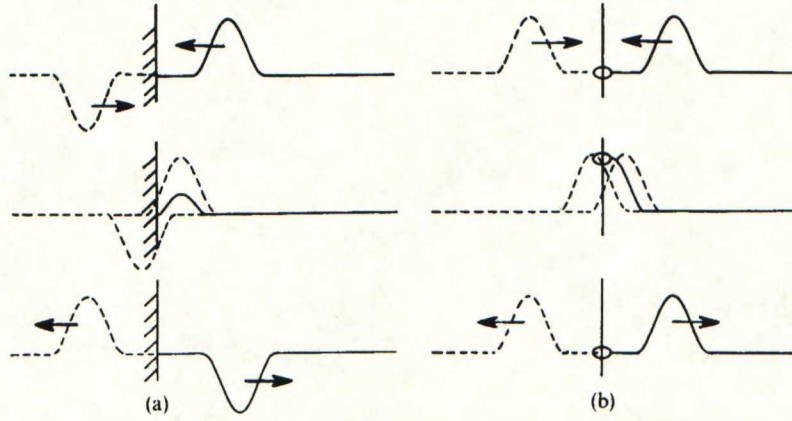
missä *aaltoluku* $k = 2\pi/\lambda = \omega/c$ ja vakiot A ja B ovat kompleksilukuja. Periaatteessa yksiulotteisessa resonaattorissa voi samanaikaisesti edetä mielivaltainen määrä siniaaltoja. Paikallinen poikkeama on kaikkien resonaattorissa etenevien aaltojen aiheuttamien poikkeamien summa.

2.2.2 Kielessä etenevä aalto

Esimerkkinä yksiulotteisesta resonaattorista tarkastellaan *ideaalista kieltä*, josta tehdään seuraavat oletukset (Hiller ja Ruiz 1971):

- kieli värähtelee vain yhdessä tasossa,
- kielen jokainen piste liikkuu ainoastaan kielen tasapainoasemaan nähden kohtisuorassa suunnassa eli kielessä ei esiinny pitkittäistä värähtelyä,
- kielen jännitys ei muutu värähtelyn aikana,
- kieli on äärettömän joustava,
- kielen massa on hyvin pieni verrattuna jännitykseen,
- kielen tiheys on tasajakaantunut kielen koko pituudelle,
- värähtelyn maksimiampplitudi on pieni kielen pituuteen verrattuna ja
- akustinen ympäristö ei vaikuta kielen värähtelyyn lainkaan.

Kielessä etenevä aalto heijastuu kielen päässä. Heijastumisen yhteydessä aallon vaihe saattaa kääntyä riippuen päiden kiinnityksestä. Seuraavassa tarkastellaan ilmiötä esi-merkin avulla.



Kuva 2.2 Pulssin heijastuminen kielen (a) kiinnitetyssä ja (b) vapaassa päässä (Fletcher ja Rossing 1991).

Kuvassa 2.2 esitetään kaksi erilaista heijastumista värähtelevän kielen päässä. Kuvassa a) kieli on *kiinnitetty* siten, ettei sen pää voi liikkua eli kielen päässä poikkeama $y = 0$. Olkoon kieli kiinnitetty kohtaan $x = 0$. Tällöin yhtälöstä (2.6) saadaan:

$$y = f_1(ct - 0) + f_2(ct + 0) = 0 \quad (2.8)$$

mistä seuraa

$$f_1(ct) = -f_2(ct) \quad (2.9)$$

Täten aallon vaihe kääntyy 180° heijastuksen yhteydessä kuten kuvassa 2.2(a).

Kuvassa 2.2(b) kielen pää on *vapaa*. Tilanne voidaan tulkita siten, että kielen päässä on massaton rengas, joka on kiinnitetty ohueen tankoon siten, että rengas voi liikkua y-suunnassa kitkattomasti. Koska poikittainen voima ei tässä tapauksessa ole mahdollinen, on vapaassa päässä tapahtuvalle heijastukselle voimassa ehto (Fletcher ja Rossing 1991):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad (2.10)$$

Osittaisderivoimalla aaltoyhtälön ratkaisu (2.6) saadaan:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\dot{f}_1 + \dot{f}_2 \quad (2.11)$$

Yhtälöistä (2.10) ja (2.11) voidaan ratkaista heijastunut aalto f_2 .

$$f_2(ct) = f_1(ct) \quad (2.12)$$

Toisin sanoen kielen vapaasta päästä heijastuessaan ainoastaan aallon kulkusuunta muuttuu.

2.2.3 Seisovat aallot värähtelevässä kielessä

Edellä tarkasteltiin pulssin etenemistä kielessä. Musiikkiakustiikan kannalta kiinnostavampi tapaus on jatkuva tila, jossa koko kieli toimii värähtelijänä. Tarkastellaan molemmista päistään kiinnitettyä kieltä.

Kieli voi värähdellä samanaikaisesti useissa moodeissa, joita kutsutaan sen *normaalimoodeiksi* (engl. normal modes). Molemmista päistään kiinnitetyn kielen normaali-moodien aallonpituudet λ_n voidaan esittää seuraavasti (Campbell ja Greated 1987):

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad (2.13)$$

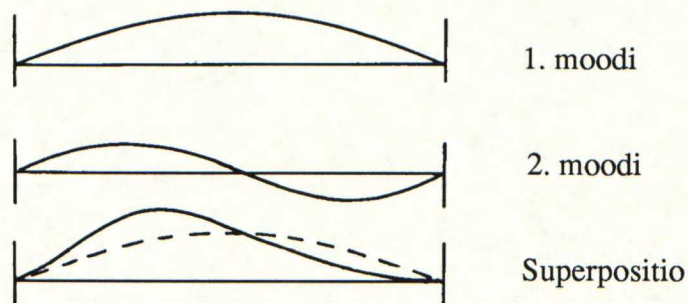
missä $n = 1, 2, 3, \dots$ on moodin järjestysluku ja L on kielen pituus. Moodeihin liittyvä värähtelevä aalto muodostuu siniaallon puolikkaista. Päistä kiinnitetty kieli on *puoliaaltoresonaattori* ja sen resonanssitaajuuDET voidaan esittää seuraavalla yhtälöllä (Fletcher ja Rossing 1991):

$$f_n = \frac{nc}{2L} \quad (2.14)$$

missä $n = 1, 2, 3, \dots$ on harmonisen järjestysluku. Ideaalisella kielellä on siten täydellinen harmonisten sarja.

Kukin moodi muodostaa *seisovan aallon* (engl. standing wave) siten, että sillä on *solmukohta* (engl. node) kielen kummassakin päässä sekä lisäksi $n - 1$ solmukohtaa tasavälein muualla kielessä. Solmun kohdalla kieli ei värähtele kyseisen moodin taajuuDella. Lisäksi kullakin moodilla on n kappaletta *kupukohtia* (engl. antinode), joissa kieli värähtelee moodin maksimiamplitudilla. Seisovaan aaltoon ei näytä liittyvän värähtelyliikkeen etenemistä, vaan se tuntuu pysyvän paikallaan.

Värähtelevässä kielessä ei voida välittömästi havaita eri moodien muodostamia seisovia aaltoja, vaan ainoastaan yksi aalto, joka saadaan värähtelymoodien superpositiona eli summana. Kuvassa 2.3 esitetään kielen kaksi alinta moodia ja niiden summa.



Kuva 2.3 Kahden alimman värähtelymoodin superpositio kielessä (Campbell ja Greated 1987).

2.2.4 Pitkittäinen aaltoliike putkessa

Puhallussoittimien putkessa etenevä pitkittäinen aaltoliike koostuu ilmanpaineen tihentymistä ja harventumista. Pitkittäisen ja poikittaisen aaltoliikkeen välillä on havaittavissa analogia. Päistään avoimessa putkessa äänipaine käyttäytyy kuten poikkeama päistään kiinnitetyssä kielessä, jota näpätään keskeltä (Coltman 1976).

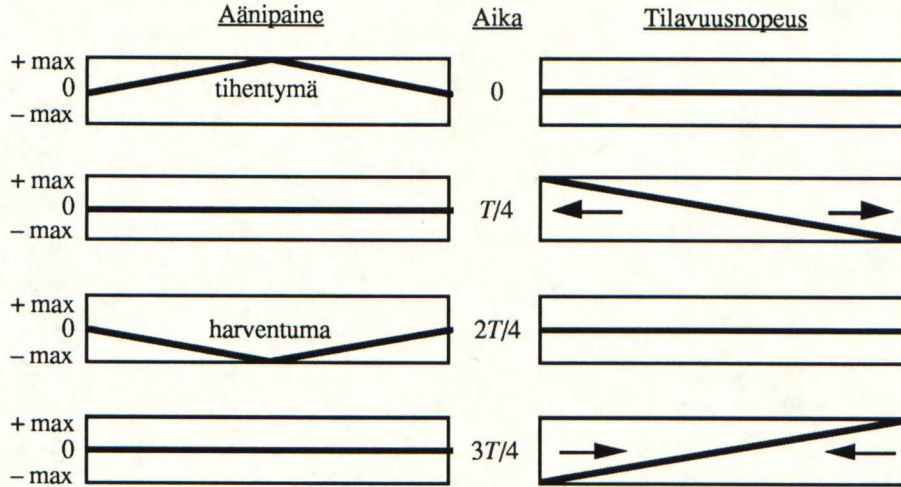
Putkeen syntyy seisovia aaltoja kuten kieleenkin. Seisovan äänipaineaallon solmukohdat muodostuvat aina putken avoimien päiden kohdalle, sillä päissä paineen on oltava sama kuin staattinen ilmanpaine. Solmukohdassa ei voi esiintyä paineen tihentymiä eikä harventumia. Putken avoimessa päässä ehto toteutuu siten, että äänipaineen vaihe kääntyy heijastumisen yhteydessä. Siten tulevan ja heijastuvan aallon amplitudien summa putken päädyn kohdalla on nolla. Äänipaineen kupukohtia muodostuu putken päiden välille kaikkia harmonisia komponentteja vastaten.

Tilavuusnopeudella on puolestaan kupukohta putken avoimessa päässä. Tilavuusnopeuden suuruus vaihtelee nollan ja maksimin välillä ja se suuntautuu vuorotellen putkeen ja putkesta ulos.

Putken suljetussa päässä äänipaineella on kupu, ja äänipaine heijastuu kuten poikkeamapulssi kielen avoimesta päästä: ainoastaan aallon suunta muuttuu. Tilavuusnopeus häviää putken suljetussa päässä, joten siihen syntyy solmukohta.

Coltman (1976) on mitannut ja selittänyt kuinka äänipaine- ja tilavuusnopeusaallot käyttäytyvät huilun tai urkupillin putken sisällä. Kuvassa 2.4 esitetään sekä äänipaineen että tilavuusnopeuden jakauma jakson eri vaiheissa. Äänipaineen käyttäytyminen putkessa on analoginen keskeltä näpätyn kielen poikkeaman kanssa: paineen ollessa maksimissaan putken keskellä on paine putken päissä nolla ja paineaalto on kokonaisuudessaan likimain kolmion muotoinen. Keskikohdan paineen alkaessa laskea leviää keskeltä reunoja kohti tasainen alue. Kun tasainen osa saavuttaa putken päät, on paine hetkellisesti nolla putken joka kohdassa. Seuraavaksi sama kolmiomainen paineaalto kehittyy negatiiviseen suuntaan.

Tilavuusnopeusaalto on sekä paikan että ajan suhteen neljännesaallon verran myöhässä äänipainetta (Coltman 1976), joten tilavuusnopeuden kuvut ja solmut ovat päinvastaisissa kohdissa paineeseen verrattuna. Äänipaineen ollessa nolla kaikkialla on hiukkassnopeus nollassa putken keskikohdassa, mutta positiivisessa maksimissaan putken toisessa ja negatiivisessa maksimissaan toisessa päässä. Hiukkassnopeuden tasaiset alueet lähtevät liikkeelle putken päistä amplitudin samalla laskiessa. Kun tasaiset alueet saavuttavat putken keskikohdan, on hiukkassnopeus puolestaan hetkellisesti nolla kaikkialla putkessa.



Kuva 2.4 Äänipaineen ja tilavuusnopeuden jakauma avoimessa putkessa jakson T aikana.

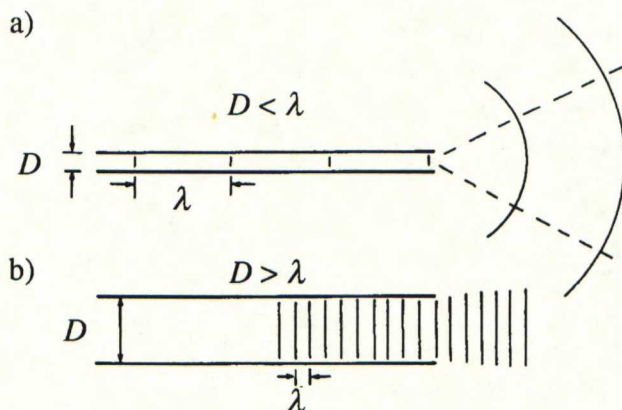
Avoim putki on *puoliaaltoresonaattori*, kuten päistään kiinnitetty kieli. Toisesta päästään suljettu putki, eli lyhyesti suljettu putki (sillä molemmista päistään suljetusta putkesta ei kannata puhua), on *neljännesaaltoresonaattori*, koska sen normaalimoodien aallonpituudet ovat putken pituuden neljänneksen monikertoja. Paineella ohjattujen puhallinsoittimien, kuten klarinetin ja oboen putki käyttäytyy oleellisesti kuten suljettu putki.

2.2.5 Heijastuminen, säteily ja päätykorjaus putkessa

Avoimen putken päässä tapahtuva heijastuminen ei todellisuudessa koskaan voi olla täydellinen. Puhallussoittimien toiminta perustuukin siihen, että päätyheijastuksen yhteydessä osa äänienergiasta säteilee ympäristöön aiheuttaen kuultavan äänen ja osa heijastuu takaisin putkeen synnyttäen seisovia aaltoja (Benade 1976). Täydellisesti heijastava tai säteilevä putken pää tekisi puhallinsoittimen toiminnan mahdottomaksi.

Lisäksi yksinkertaistetussa tarkastelussa ei otettu huomioon *päätykorjausta*, jolla tarkoitetaan putken fyysisen ja efektiivisen pituuden eroa. Päätykorjauksen aiheuttaa *takertunut massa* eli putken ulkopuolella värähtelevä ilmapatsas, jonka ansiosta putkessa värähtelevä ilmapatsas on hieman pidempi kuin putken fyysinen pituus.

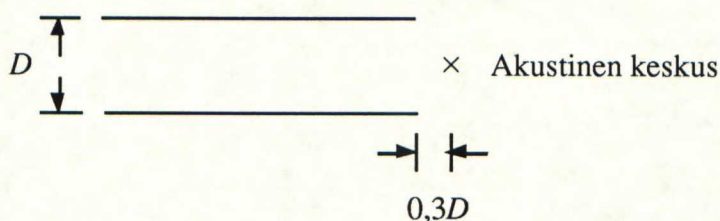
Putken avoimessa päässä tapahtuvat ilmiöt voidaan helposti selittää ääniaallon *diffraktion* eli taipumisen avulla: putkesta avoimeen päähän saapuva tasoalloorintama muuttuu siten, että putken keskellä edennyt osa alloorintamasta jatkaa suoraan eteenpäin ja reunoilla aalto taipuu ulospäin kuvan 2.5 esittämällä tavalla (Campbell ja Greated 1987). Diffraktion määrä riippuu merkittävästi aallonpituuden ja putken halkaisijan suhteesta: aallonpituuden ollessa suuri putken halkaisijaan nähden diffraktio on voimakasta (kuva 2.5a) ja aallonpituuden ollessa halkaisijaan nähden pieni se on vähäistä (kuva 2.5b).



Kuva 2.5 Tasoaallon diffraktio putken avoimessa päässä (Campbell ja Greated 1987). D on putken halkaisija ja λ aallonpituus.

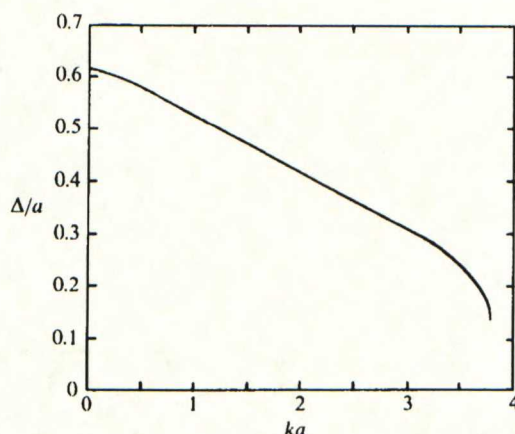
Diffraktion yhteydessä osa äänienergiasta heijastuu takaisin putkeen ja vain osa säteilee ulos vapaaseen tilaan. Heijastuminen riippuu taajuudesta kuten diffraktiokin. Pienillä taajuuksilla – aallonpituuden ollessa suuri putken halkaisijaan nähden – diffraktio on voimakasta ja merkittävä osa äänienergiasta heijastuu takaisin (vrt. kuva 2.5a). Suurilla taajuuksilla tasoaalto etenee taipumatta putkesta ulos ja heijastuminen on vähäistä.

Päätykorjaus voidaan selittää putken avoimen pään äänipaineen solmukohdan eli *akustisen keskuksen* sijainnin avulla. Suurilla taajuuksilla putken akustinen keskus on putken suuaukolla ja putken akustinen eli *efektiivinen pituus* on likimain sama kuin sen fyysinen pituus. Pienillä taajuuksilla akustinen keskus on kuvan 2.6 mukaisesti siirtynyt putken suuaukolta ulospäin ja putken efektiivinen pituus on fyysistä pituutta suurempi. Pienillä taajuuksilla putken fyysisen ja efektiivisen pituuden erotus eli *päätykorjaus* on noin 30% putken halkaisijasta D .



Kuva 2.6 Akustisen keskuksen sijainti putken pään luona pienillä taajuuksilla.

Päätykorjaus riippuu huomattavasti taajuudesta. Kuvassa 2.7. esitetään päätykorjaus taajuusmuuttujan ka funktiona, missä k on aaltoluku ja a putken säde. Päätykorjaus pienenee taajuuden kasvaessa.



Kuva 2.7 Putken avoimen pään päätykorjaus taajuusmuuttujan ka funktiona, missä k on aaltoluku ja a putken säde (Fletcher ja Rossing 1991).

2.3 Moniulotteiset resonaattorit

Useimmissa lyömäsoittimissa resonaattori ei ole yksiulotteinen, vaan kaksi- tai kolmiulotteinen. Kaksiulotteisia resonaattoreita ovat *membranofonit*, joissa värähtelevä kalvo tuottaa äänen, sekä värähtelevät levyt. Lisäksi on olemassa kolmiulotteisia resonaattoreita, joissa suljettu ilmamassa värähtelee. Kolmiulotteisiin värähtelijöihin ei tässä paneuduta.

2.3.1 Kaksiulotteiset resonaattorit

Rummun kalvo värähtelee tasossa, joten se on kaksiulotteinen värähtelijä. Nykyään käytettävät rumpukalvot ovat lähes aina pyöreitä (Campbell ja Greated 1987). Aiemmin on käytetty myös nelikulmaisia kalvoja.

Pyöreää rumpukalvoa lyötäessä se poikkeutuu tasapainoasemastaan. Joustavuuden ansiosta kalvo lähtee lyönnin jälkeen palautumaan tasapainoasemaansa, mutta koska kalvon vaimennus on äärellinen, jatkuu liike tasapainoaseman yli. Näin kalvoon syntyy vaimeneva värähtely.

Ideaalisen pyöreän kalvon resonanssitaajuudet poikkeavat merkittävästi ideaalisesta kielestä, jonka moodit muodostavat täydellisen harmonisen sarjan. Kalvon moodit ovat taajuusalueessa huomattavasti lähempänä toisiaan kuin harmonisessa sarjassa. Yhdenkään moodin taajuus ei ole alimman moodin taajuuden kokonaislukukerrannainen eli spektri on täydellisen epäharmoninen.

Lisäksi kaksiulotteisiin resonaattoreihin lukeutuvat värähtelevät levyt, jotka voivat olla esimerkiksi nelikulmaisia tai pyöreitä. Niitä käytetään erityisesti kielisoittimien kaikuohjassa vahvistamassa ja värittämässä kielen vaimeaa ääntä.

3 SOITTIMIEN ÄÄNEN SYNTEESI JA FYSIKAALINEN MALLINTAMINEN

3.1 Perinteiset äänisynteesimenetelmät

Monet äänisynteesimenetelmät on kehitetty ajatellen akustisten soittimien äänen synteesiä, vaikka niitä enimmäkseen käytetäänkin elektronisten sointien tuottamiseen (Alles 1980). Synteesimenetelmän on pystyttävä tuottamaan monimutkaisia signaaleja yksinkertaisen ohjaustiedon perusteella. Osa synteesimenetelmistä onkin laadittu keskittyen laskennan tehokkuuteen ja pyrkien mahdollisimman niukkaan ohjausparametrien määrään.

Synteesimenetelmät voidaan jakaa ääntä tuottavan signaalinkäsittelyjärjestelmän perusluonteen mukaan kahteen pääluokkaan (Moore 1990, De Poli 1983):

- lineaariset menetelmät
- epälineaariset menetelmät

Lineaarisissa synteesimenetelmissä ääntä tuotetaan lineaarisella signaalinkäsittelyjärjestelmällä, jolle määritelmän mukaan pätevät seuraavat ominaisuudet (Smith 1985, Moore 1990):

- 1) Lähdön amplitudi on suoraan verrannollinen tulon amplitudiin eli

$$L\{ax\} = a L\{x\} \quad (3.1)$$

missä L on lineaarinen operaattori eli tässä tapauksessa järjestelmän siirtofunktio ja a mielivaltaisen vakio. Yhtälön (3.1) kuvaamaa ominaisuutta kutsutaan *homogeenisuudeksi*.

- 2) Jos järjestelmään syötetään monia herätteitä samalla kertaa, on saatava vaste sama kuin jos herätteet olisi syötetty erikseen ja niiden vasteet summattu. Sama voidaan esittää formaalisti kahden mielivaltaisen herätteen x ja y avulla:

$$L\{x + y\} = L\{x\} + L\{y\} \quad (3.2)$$

Tämä ominaisuus tunnetaan nimellä *superpositioperiaate*.

Järjestelmän lineaarisuus voidaan esittää yleisessä muodossa lausekkeella:

$$L\{ax + by\} = aL\{x\} + bL\{y\} \quad (3.3)$$

missä a ja b ovat mielivaltaisia vakioita. Mikäli nämä ehdot toteutuvat kaikille mahdollisille herätteille, on järjestelmä lineaarinen (Moore 1990).

Seuraavassa luetellaan yleisimpiä lineaarisia äänisynteesimenetelmiä.

- *Taulukkositynteessä* (engl. wavetable synthesis) luetaan taulukkoon talletettua signaalia joko suoraviivaisessa tai mielivaltaisessa järjestyksessä (De Poli 1983).
- *Lisäävä synteesi* (engl. additive synthesis) eli Fourier-synteesi perustuu käänteiseen Fourier-muunnokseen, jolloin haluttu signaali saadaan summaamalla sinimuotoisia komponentteja, joiden taajuus, amplitudi ja vaihe voidaan määrätä riippumattomasti (Moorer 1977).
- *Vähentävä synteesi* (engl. subtractive synthesis) on yleisnimitys menetelmille, joissa haluttu äänisignaali tuotetaan suodattamalla jotakin herätesignaalia (Moorer 1977, Gordon 1985).
- *Rae- eli jyväsysteessä* (engl. granular synthesis) ääniä tuotetaan summaamalla joukko ajan ja taajuuden suhteen rajoitettuja pulsseja (De Poli *et al.* 1991).

Järjestelmiä, joille superpositioperiaate ei päde, sanotaan *epälineaariksi*. Akustikan kannalta epälineaarisuus merkitsee erityisesti sitä, että järjestelmän lähdöstä saadaan signaali, jonka spektrissä on myös muita taajuuskomponentteja kuin herätteessä. Kyseeseen tulevat tulosignaalin spektrissä esiintyvien komponenttien summa- ja erotustaajuudet. Täten epälineaarisuus aiheuttaa sekä harmonista että keskeismodulaatiosäröä (Smith 1985). Lisäksi ulostulon spektri riippuu syötteen amplitudista.

Epälineaarisia äänisynteesimenetelmiä ovat seuraavat:

- *Aaltomuotoilu* (engl. waveshaping) on yleisnimitys synteesimenetelmille, joissa haluttu signaali tuotetaan vääristämällä siniaaltoja epälineaarisella funktiolla (Arfib 1979, Le Brun 1979).
- *Diskreetit summayhtälöt* (engl. discrete summation formulae) tarjoavat matemaattisen menetelmän monimutkaisten aaltomuotojen laskennalliseen tuottamiseen (Moorer 1976, 1977).
- *Rengasmodulaatio* (engl. ring modulation) tarkoittaa kahden signaalin kertomista keskenään (De Poli 1983). Signaalien välisen kertolaskun tuloksena saatavan signaalin spektri koostuu alkuperäisten signaalien harmonisten summa- ja erotustaajuuksista.
- *Kulmamodulaatiomenetelmiin* sisältyvät tunnetuin äänisynteesimenetelmä, taajuusmodulaatio eli *FM-synteesi* (Chowning 1973) sekä *vaihemodulaatio* (De Poli 1983).

Epälineaarisia synteesimenetelmiä kutsutaan joskus yleisnimellä *kertova synteesi* (engl. multiplicative synthesis), koska ne voidaan johtaa muotoon, jossa signaaleja ker-

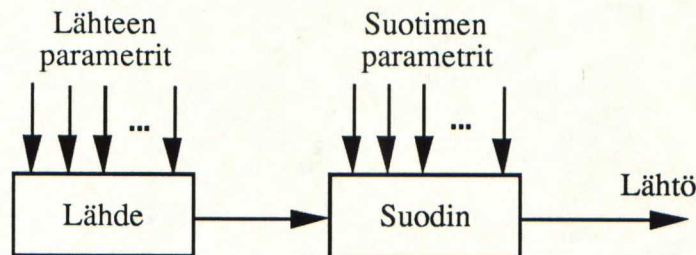
rotaan keskenään (Le Brun 1979). Epälineaariset synteessimenetelmät on siten mahdollista tulkita modulaatiomenetelmiksi.

Seuraavassa esitellään lähemmin kaksi keskeistä äänisynteesiperiaatteita, jotka soveltuvat soittimien äänen synteesiin ja liittyvät oleellisesti jatkossa esiteltävään huilun fysikaaliseen malliin.

3.1.1 Vähentävä synteesi

Monien soittimien ja myös ihmisen puheen äänentuottomekanismi voidaan pelkistää erottamalla *heräte* ja *resonaattori* (Gordon 1985). Puheen heräte on äänihuulten värähtelyn aiheuttama glottispulssi. Ääniväylä toimii resonaattorina.

Herätettä voidaan mallintaa signaaligeneraattorilla, joka tuottaa sopivaa herätesignaalia. Resonaattori puolestaan on suodin, joka vastaa soittimen resonaattoriosaa tai ihmisen ääniväylää ja joka suodattaa herätesignaalia (Gordon 1985). Tällaiseen *lähde-suodinmalliin* perustuvaa synteessimenetelmää kutsutaan – hieman harhaanjohtavasti – *vähentäväksi synteeksiksi* (engl. *subtractive synthesis*). Vähentävässä synteessissä on pyrkimyksenä saada aikaan tietty amplitudivaste. Esimerkiksi äänen aluke ja tuotetun signaalin aaltomuoto, eli harmonisten vaihesuhteiden vaikutus, jätetään yleensä huomiotta.



Kuva 3.1 Vähentävän äänisynteesin periaate (Moore 1990). Suotimella määrätään lähdöstä saatavan signaalin spektrin yleisiä ominaisuuksia, kuten *formanttien keskitäajuu*det ja *kaistanleveydet*. Sekä lähteen että suotimen parametreja voidaan muuttaa ajan funktiona.

Kuvassa 3.1 esitetään vähentävän synteessin eli lähde-suodinmallin periaate. Lähde tuottaa yleensä kohinaa tai spektriltään rikasta ja helposti tuotettavissa olevaa herätesignaalia (Gordon 1985). Usein käytetään geometrisia aaltomuotoja, kuten kolmio- tai suorakaideaaltoa. Puhesynteessissä soinnillisten äänteiden herätteenä käytetään glottispulssin oletettua muotoa jäljittelevää periodista signaalia. Lähde-suodinmallin digitaalisen toteutuksen yhteydessä on kiinnitettävä huomiota siihen, ettei herätesignaali sisällä suuria taajuuksia, jotka aiheuttaisivat laskostumista.

Vähentävässä synteessissä suotimella määrätään tuotettavan signaalin spektrin yleisiä ominaisuuksia, kuten *formanttien* eli siirtofunktion resonanssien keskitäajuu

tanleveydet. Lineaarisen digitaalisuotimen yleinen muoto voidaan esittää seuraavasti (Moorer 1977):

$$y(n) = - \sum_{k=1}^M a_k y(n-k) + \sum_{r=0}^N b_r x(n-r) \quad (3.4)$$

missä a_k ja b_r ovat suodinkertoimia, $x(n)$ on tulosignaali ja $y(n)$ lähtösignaali. Suotimen asteluku on suurempi vakioista M ja N . Korkea-asteiset digitaalisuotimet kannattaa toteuttaa toisen asteen IIR-suotimien kaskadina (Gordon 1985) tai voidaan myös laatia suodinpankkeja, jolloin useita resonaattoreita eli kaistanpäästösuotimia kytketään sarjaan tai rinnan.

Yleisesti sanoen suotimilla vaikutetaan ainoastaan herätesignaalin harmonisten amplitudi- ja vaihesuhteisiin. Tuotettu synteettinen ääni sisältää siten samoja spektrikomponentteja kuin heräte (Alles 1980). Suodatuksen seurauksena herätteen spektrin jotkin komponentit voivat vaimentua ja toiset puolestaan korostua, ja nimenomaan tästä syystä nimitys vähentävä synteesi on huono. Antaahan se monille asiaa tarkemmin tuntemattomille henkilöille vääristyneen käsityksen, että suodin voisi ainoastaan poistaa jotakin eli että sen siirtofunktiossa voisi olla ainoastaan nollakohtia eikä lainkaan napoja.

Useissa tapauksissa pelkästään taajuusalueen tarkastelu ei ole ihmisen kuulon kannalta riittävä lähestymistapa. Erityisesti resonanssien aikavaste on kuulon kannalta merkittävä ominaisuus. Mikäli resonanssin aikavakio on noin 20 millisekuntia tai vähemmän, havaitaan pääasiassa taajuusvasteen vaikutus. Jos aikavakio on pitempi, eli esimerkiksi 50 millisekuntia, on resonanssin impulssivasteen verhokäyrä kuulon kannalta merkittävä tekijä.

Lähde-suodinmalli on osoittautunut menestykselliseksi myös puhesynteesissä (Moorer 1977). Terminaalianalogiasyntetisaattorit, joissa mallinnetaan puhesignaalin taajuusalueen ominaisuuksia, koostuvat yleensä suodinpankista, jonka kukin resonaattori tuottaa yhden formantin synteettiseen puheeseen.

Vähentävän synteesin vakava puute akustisten soittimien äänen synteesin suhteen on epälineaarisen vuorovaikutuksen puuttuminen lähteen ja suotimen välillä (Gordon 1985). Myös sopivan lähdesignaalin määrittäminen on vaikeaa.

Tässä työssä esiteltävä huilun äänen synteesimenetelmä voidaan tulkita lähde-suodinmalliksi. Tosin luvussa 6 kuvattava huilumalli sisältää epälineaarisuuden, joten kyseessä ei ole perinteinen vähentävä synteesimenetelmä.

3.1.2 Aaltomuotoilu

Aaltomuotoilu (engl. waveshaping) eli epälineaarinen säröytys on varsin laaja synteessimenetelmien luokka (Arfib 1979, Le Brun 1979, Roads 1985). Tarkoituksena on muuttaa signaalin aaltomuotoa siten, että tuloksena saadaan spektriltään rikkaampi sointi. Signaalia $x(t)$ muotoillaan vakiofunktioilla F , jolloin tuloksena saadaan signaali $y(t)$:

$$y(t) = F[x(t)] \quad (3.5)$$

Säröytetyn signaalin $y(t)$ perustaajuus on sama kuin herätteen $x(t)$, mutta sen spektrissä on runsaammin harmonisia. *Muotoilufunktio* F (engl. shaping function) voidaan tulkita amplitudiriippuvaksi vahvistimeksi, joka tuottaa harmonista säröä.

Perinteisessä aaltomuotoilussa heräte on sinimuotoinen signaali (Le Brun 1979), jolloin $x(t) = \cos(2\pi ft)$. Tällaista ratkaisua ei voitane pitää rajoituksena, sillä epälineaarisella säröytyksellä voidaan tässäkin tapauksessa tuottaa kaikki mahdolliset harmoniset spektrit (Le Brun 1979). Sinimuotoisen herätteen käyttö on varsin perusteltua, sillä säröytetyn signaalin spektrin analyttinen ratkaisu muodostuisi muussa tapauksessa erittäin monimutkaiseksi.

Muotoilufunktio F voi periaatteessa olla mikä tahansa kuvaus $f: x \rightarrow y$. Käytännössä kannattaa pitäytyä äärellisen pituisissa polynomeissa, sillä tällöin on helppoa etukäteen määritellä, mitä spektrikomponentteja menetelmä tuottaa. Mielivaltainen muotoilufunktio tuottaa yleisessä tapauksessa loppumattoman harmonisten sarjan, mikä aiheuttaa digitaalisessa toteutuksessa korkeataajuuksien spektrikomponenttien laskostumisen (Le Brun 1979, Roads 1985). *Pariton* eli x-akselin suhteen symmetrinen muotoilufunktio F tuottaa ainoastaan parittomia harmonisia, sillä tuloksena saatavan aaltomuodon puolijaksot ovat vääjäämättä samanmuotoiset. Mikäli muotoilufunktio on *parillinen* eli symmetrinen y-akselin suhteen, generoi menetelmä vain parillisia harmonisia (Roads 1985).

Kun tiedetään minkälainen spektri halutaan tuottaa, voidaan muotoilufunktio määrätä käyttäen *ensimmäisen lajin Tsebysev-polynomeja*, jotka ovat Tsebysevin differentiaaliyhtälön ratkaisuja (Moore 1990):

$$(1 - x^2)T_k'' - xT_k' + k^2T_k = 0 \quad , \text{ missä } k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

Ensimmäisen lajin Tsebysev-polynomit voidaan määritellä *rekursiivisesti* (Le Brun 1979):

$$T_{k+1}(x) = 2xT_k(x) - T_{k-1}(x) \quad (3.7)$$

Le Brun (1979) antaa Tsebysev-polynomien määritelmän myös *suljetussa muodossa*:

$$T_k(x) = \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^k + (x - \sqrt{x^2 - 1})^k}{2} \quad (3.8)$$

Seuraavassa esitetään muutamia Tsebysev-polynomeja:

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

Tsebysev-polynomit $T_k(x)$ ovat erityisen käyttökelpoisia muotoilufunktion määrittämisestä ajatellen, sillä niille pätee (Le Brun 1979):

$$T_k[\cos(\theta)] = \cos(k\theta) \quad (3.9)$$

missä k on polynomin asteluku. Kun funktiolle T_k syötetään sinimuotoinen heräte, saadaan generoitua yhtälön (3.9) mukaisesti herätteen k :s harmoninen. Koska kukin polynomi T_k tuottaa vain yhden harmonisen, on mahdollista saada aikaan haluttu jatkuvan tilan spektri muodostamalla sopiva lineaarikombinaatio kyseisistä polynomeista T_k . Muotoilufunktio F määritetään seuraavasti (Le Brun 1979):

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x) \quad (3.10)$$

missä kerroin a_k on k :nnen harmonisen suhteellinen osuus spektrissä. Periaate on sama kuin additiivisessa synteessissä, missä jokaisen harmonisen amplitudi voidaan myöskin määrätä muista riippumatta.

Mikäli muotoilufunktio on äärellisen kertaluokan polynomi, on sen tuottama jatkuvan tilan spektri kaistarajoitettu (Arfib 1979, Le Brun 1979). On merkittävää, että tämä pätee kaikille herätteen amplitudin arvoille, vaikka aaltomuotoilun tuottama spektri riippuukin herätteen amplitudista (Le Brun 1979). Lisäksi on hyödyllistä havaita, että polynomin parilliset tekijät vaikuttavat vain parillisten harmonisten muodostumiseen ja vastaavasti parittomat tekijät parittomien. Kunkin harmonisen voimakkuuteen vaikuttavat ainoastaan samaa ja korkeampaa kertaluokkaa olevat polynomin tekijät. Arfib (1979) varoittaa jyrkästi kaistarajoitetun spektrin samoin kuin hyvin rikkaan spektrin tuottamiseen liittyvistä aika-alueen ongelmista. Tällaisissa tapauksissa saadaan voimakkaasti aaltoileva muotoilufunktio F , jolloin lähdön amplitudi käyttäytyy hallitsemattomasti herätteen amplitudia muutettaessa. Tilanne on analoginen Gibbsin ilmiön kanssa.

Aaltomuotoilun mahdollisuuksia voidaan laajentaa lisäämällä järjestelmään muotoilufunktion jälkeen *amplitudimodulaatiota* (Arfib 1979, Le Brun 1979). Yksinkertainen tapa on kertoa muotoilufunktion lähtö siniaallolla. Tällöin spektriä voidaan siirtää taajuusasteikolla ja voidaan tuottaa epäharmonisia spektrejä sekä saada spektrikomponentit laskostumaan negatiivisilta taajuuksilta positiivisille. Lisäksi modulaation avulla on

mahdollista toteuttaa *formantteja* (Arfib 1979). De Poli (1984) on myöhemmin ehdottanut muotoilufunktion muodostamista polynomin sijasta *kahden polynomin osamääränä*. Tällöin muotoilufunktiolla on nollakohtien lisäksi napoja. Kun herätteenä käytetään perinteisen aaltomuotoilun tapaan sinimuotoista signaalia, saadaan tuotettua spektrejä, joiden verhokäyrä muistuttaa vaimenevaa siniaaltoja (De Poli 1984). Myös tällä menetelmällä saadaan aikaan formantteja.

Sinimuotoisen herätteen korvaaminen monimutkaisemmalla signaalilla vaikeuttaa tuotetun spektrin analyttistä määrittämistä. Yleisesti voidaan sanoa, että tällaisessa tapauksessa epälineaarinen särötys tuottaa spektrin, joka koostuu herätteen harmonisten summa- ja erotustaajuuksista (Le Brun 1979). Monimutkaista herätettä käytettäessä parillisten ja parittomien harmonisten osuutta ei voida enää säätää toisistaan riippumatta (Arfib 1979).

Aaltomuotoilulla voidaan simuloida esimerkiksi päätevahvistimen käyttäytymistä sen alkaessa leikata voimakkaan signaalin huippukohtia. Samoin on mahdollista jäljitellä akustisissa soittimissa esiintyviä epälineaarisuuksia (Beauchamp 1979, Alles 1980, Sullivan 1990).

3.1.3 Perinteisten synteesimenetelmien rajoituksista

Edellä esitellyt ja myös muut perinteiset synteesimenetelmät ovat signaalinkäsittelyalgoritmeja, joilla ei periaatteessa ole juuri tekemistä akustisten soittimien äänentuottomekanismien kanssa. Sen sijaan ne pyrkivät jäljittelemään soittimen säteilemää äänisignaalia keskittyen sen ominaisuuksiin, kuten aaltomuotoon tai spektriin. Perinteistä äänisynteesiä voidaan kutsua signaalimallintamiseksi (engl. signal modeling).

Äänisynteesimenetelmiä voidaan arvioida suhteellisen objektiivisesti selvittämällä seuraavia piirteitä (Adrien 1991):

- ohjusparametrien havainnollisuus käyttäjälle
- parametrien vaihtelun ja äänensävyn muuttumisen välisen suhteen yksinkertaisuus
- tosiaikaisen ohjauksen helppous

Soittajan kannalta perinteisten synteesimenetelmien keskeinen ongelma on *parametrien epähavainnollisuus* (Wawrzynek 1989). Monet abstraktit synteesimenetelmät, kuten FM-synteesi, on laadittu tavoitellen laskennallista tehokkuutta ilman yhteyttä fyysikaaliseen todellisuuteen. Tällöin menetelmän ohjausparametrit ovat myöskin abstrakteja, eikä niillä ole luonnostaan kytkentää mihinkään soittotavassa tapahtuvaan muutokseen. Siksi tavallisella äänisyntetisaattorilla on varsin vaikeaa tuottaa elävästi soivia säveliä ja luontevasti artikuloitua musiikkia.

Taajuusalueen menetelmien, kuten lähde-suodinmallin, etuna voidaan pitää äänen spektrin helppoa muokkausta. Niiden heikkous puolestaan on transienttien vaikea jäljittely. Pahimmillaan synteettinen ääni on alusta alkaen samanlainen kuin jatkuvassa tilassa. Ihmisen kuulo on erittäin herkkä nopeille tapahtumille, ja nimenomaan äänen aluk-

keen on havaittu olevan merkittävin piirre, josta ihminen tunnistaa esimerkiksi tietyn soittimen. Tästä aiheutuu ongelmia, kun halutaan tuottaa synteettistä musiikkia: siirtymät sävelestä toiseen eivät ole luontevia ja kuultava lopputulos on lohduttoman konemainen, vaikka äänen jatkuvan tilan spektri muistuttaisi läheisesti jonkin soittimen spektriä. Synteesin tosiaikainen hallinta onnistuu perinteisten menetelmien yhteydessä yleensä vaivatta, sillä ohjausparametreja on vain muutama.

Useissa soittimissa sekä heräte että resonaattorin *tila* vaikuttavat syntyvään ääneen. Hyviä esimerkkejä ovat kirkon kellot ja kitara. Jos kelloa lyödään toistuvasti antamatta sen soinnin vaimentua, superponoituvat herätteiden vaikutukset. Samoin tapahtuu näppäiltäessä soivaa kitaran kieltä. Traditionaalisissa synteetikniikoissa tätä ei yleensä ole otettu huomioon taloudellisista syistä johtuen: useissa menetelmissä kutakin soivaa säveltä varten tarvittaisiin yksi oma oskillaattori ja säästön vuoksi aikaisempi ääni katkaistaan, mikäli jotakin säveltä soitetaan uudestaan. Samasta syystä eivät syntetisaattorit yleensä pysty jäljittelemään resonaattoreiden kytkeytymistä toisiinsa. Ilmiötä kutsutaan *sympateettiseksi värähtelyksi* (engl. sympathetic vibration), ja se on erityisen tyyppillinen kielisoittimille. Esimerkiksi kitarassa vapaat kielet, joita soittaja ei kädellään vaimenna, ryhtyvät hiljaa soimaan yhtä kieltä näpättäessä. Pianossa ilmiö on selvästi havaittavissa, kun pedaali on painettu alas ja kielet eivät siten ole vaimennettuja. Pianon ääneen vaikuttavat myös kaikupohjan ja sillan tila.

Perinteisten synteesimenetelmien merkitystä ei ole syytä vähätellä, vaikka ne eivät pystykään täsmällisesti jäljittelemään akustisia soittimia. Niiden tärkein etu lieene ollut mahdollisuus luoda ennenkuulumattomia ääniä, joita kevyt musiikki sekä mainos- ja viihdeteollisuus ovat voineet käyttää hyväkseen tehdäkseen yleisöön lähtemättömän vaikutuksen. Lisäksi on syytä ottaa huomioon historiallinen näkökohta: koska parempia menetelmiä ei ole ollut tarjolla, ovat nykyään halvoilta tuntuvat synteettiset äänet vaikuttaneet hämmästyttävän luonnollisilta.

Jatkossa perehdytään soittimien fysikaaliseen mallintamiseen, jossa äänisynteesin perustana on jonkin aidon *soittimen toimintaperiaate*. Tällöin huomiota kiinnitetään erityisesti siihen, *mikä äänen tuottaa*. Edellä mainittujen perinteisissä synteesimenetelmissä havaittujen puutteiden korjaaminen on ollut keskeinen lähtökohta fysikaalisten mallien kehittämisessä.

3.2 Fysikaalisen soitinmallinnuksen periaatteet

Soittimien fysikaalisen mallintamisen juuret ovat matematiikassa: Jean Le Rond D'Alembert, Leonhard Euler, Daniel Bernoulli ja Lagrange väittelivät 1700-luvun lopulla siitä miten kielessä tapahtuvat värähtelyt tulisi kuvata differentiaaliyhtälön avulla ja kuinka yhtälö voitaisiin ratkaista. Tuloksena kehittyi aaltoyhtälö sekä monta eri tapaa sen ratkaisemiseen.

Nykyään soittimien fysikaalinen mallinnus keskittyy herätteen ja värähtelevien rakenteiden sekä niiden vuorovaikutuksen simuloimiseen (Cadoz *et al.* 1984, Borin *et al.* 1989, Adrien 1991). Mallit ovat yleensä laskennallisesti raskaampia kuin perinteiset äänisynteesimenetelmät. Soittimien äänentuoton laskennallinen simulointi aloitettiin tietokoneiden kehityttyä riittävän nopeiksi 1960-luvun lopulla. Fysikaalisen akustiikan tutkijat tekivät 1970-luvulla runsaasti simulaatioita, joiden tarkoituksena oli todentaa soittimien toimintaperiaatteisiin liittyviä oletuksia (esimerkiksi Stewart ja Strong 1980). Musiikilliseen käyttöön mallit eivät soveltuneet, sillä ne olivat hyvin tehottomia. Tietokonemusiikkia ajatellen ensimmäinen tärkeä soitinmallinnukseen liittyvä tutkimus esiteltiin vuonna 1971 (Hiller ja Ruiz 1971).

Malliin pohjautuvassa äänisynteesissä jokaisesta soittimesta on laadittava malli erikseen. Mallinnusmenetelmän olisi hyvä olla luonteeltaan modulaarinen, jotta uusia soittinmalleja voitaisiin vaivattomammin laatia entisten avulla. Käytännön toteutusta ajatellen mallin toteuttavan algoritmin olisi oltava yksinkertainen ja tehokas. Soittimien fysikaalisessa mallinnuksessa on käytetty useita erilaisia lähestymistapoja, joissa nämä vaatimukset on jollain tavoin pyritty täyttämään. Soitinmallinnuksen periaatteet voidaan jakaa viiteen eri luokkaan:

- 1) *aaltoliikemallinnus*, jossa resonaattorissa etenevä värähtely kuvataan aaltoyhtälön avulla,
- 2) *elementtimenetelmä* (engl. finite element method), jossa värähtelevä järjestelmä kuvataan pistemassojen, jousien sekä vaimentimien avulla,
- 3) *aaltojohtomallinnus* (engl. waveguide modeling), joka on tehokas menetelmä yksiuulotteisen resonaattorin laskennalliseen simulointiin viivelinjan avulla,
- 4) *moodisynteesi* (engl. modal synthesis), jossa mallinnetaan järjestelmän värähtelymoodit sekä niiden ja herätteen väliset kytkennät matriisien avulla ja
- 5) *lähde-suodinmalli*.

Lähde-suodinmalli, jota käsiteltiin perinteisten synteesimenetelmien yhteydessä (ks. kappale 3.1.1), voidaan joissakin tapauksissa tulkita fysikaaliseksi mallinnusmenetelmäksi. Esimerkiksi puhesynteesissä lähteellä ja suotimella on selvä yhteys fysikaaliseen todellisuuteen. Luvussa 6 esiteltävä huilun laskennallinen malli kuuluu luokkaan aaltojohtomallit. Seuraavaksi tutustutaan lähemmin aaltoliikemallinnuksen, elementtimenetelmän ja moodisynteesin periaatteisiin.

3.2.1 Aaltoliikemallinnus

Hillerin ja Ruizin 1971 esittämä aaltoyhtälön ratkaisemiseen perustuva menetelmä on varhaisin fysikaalisen soitinmallinnuksen periaate (Hiller ja Ruiz 1971). Se soveltuu periaatteessa kaikkien mahdollisten värähtelijöiden mallintamiseen.

Artikkelissaan Hiller ja Ruiz esittävät kielen värähtelyä kuvaavan aaltoyhtälön (yhtälö 2.5) iteratiivisen ratkaisumenetelmän yleiskäyttöisessä tietokoneessa *approksimoiden differentiaaleja differensseillä*. Aaltoyhtälön perusmuoto kuvaa ideaalisen kielen värähtelyä, ja mikäli halutaan ottaa huomioon kielen jäykkyys ja erilaisia häviöitä, on siihen lisättävä uusia termejä. Seuraavassa esitetään *aaltoyhtälön laajennettu muoto*, jota voidaan käyttää kielen mallinnukseen (Hiller ja Ruiz 1971):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho S} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{ER^2}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - 2b_1 \frac{\partial y}{\partial t} + 2b_3 \frac{\partial^3 y}{\partial t^3} \quad (3.11)$$

missä T on kielen jäykkyys, ρ tiheys ja S poikkipinta-ala. Oikean puolen ensimmäisen termin kerroin on toisaalta:

$$c^2 = \frac{T}{\rho S} \quad (3.12)$$

eli *äänen nopeuden neliö*. Yhtälön (3.11) termi

$$- \frac{ER^2}{\rho} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

kuvaa kielen jäykkyyden vaikutusta, missä E on kimmokerroin ja R jäykkyyssäde (engl. radius of gyration). Seuraava termi

$$- 2b_1 \frac{\partial y}{\partial t}$$

missä b_1 on vaimennuskerroin, ottaa huomioon taajuudesta riippumattomat *lämpöhäviöt*. Yhtälön (3.11) viimeinen osa, missä b_3 on vakio, tuo mukanaan äänen säteilystä johtuvan taajuusriippuvan häviön.

Aaltoyhtälö voidaan normalisoida sijoittamalla $t' = ct$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t'^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - a \Delta x^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{2b_1}{c} \frac{\partial y}{\partial t'} + 2b_3 c \frac{\partial^3 y}{\partial t'^3} \quad (3.13)$$

missä

$$a = \frac{ESR^2}{T \Delta x^2}$$

Seuraavaksi muodostetaan normalisoitua aaltoyhtälöä (3.13) vastaava *differenssiyhtälö* korvaamalla derivaatat peräkkäisten diskreettien arvojen erotuksilla (Hiller ja Ruiz 1971):

$$\begin{aligned}
\left[1 + b_1 + 2 \frac{b_3}{\Delta t}\right] y(i, n+1) &= 2(1 - 3a)y(i, n) + 4a[y(i+1, n) + y(i-1, n)] \\
&\quad - a[y(i+2, n) + y(i-2, n)] - \left(1 - b_1\Delta t - 2 \frac{b_3}{\Delta t}\right) y(i, n-1) \\
&\quad + \frac{b_3}{\Delta t} [y(i, n+2) - y(i, n-2)]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

missä indeksi i vastaa diskreettiä *paikkaa* ja n diskreettiä *aikaa*.

Jotta yhtälö (3.14) voitaisiin ratkaista, on määriteltävä sekä *reunaehdot* että *alkutila*. Päästään kiinnitettyä kieltä vastaavat reunaehdot pakottavat kielen päiden poikkeaman nolllaksi. Alkutila määrää miten kieltä herätetään. On tärkeää huomata, että näppäilyyn kielen tapauksessa tämä tarkoittaa kielen muotoa $y(i,0)$ ja myös kielen jokaisen pisteen *nopeutta* $y'(i,0)$ hetkellä $t = 0$ (Hiller ja Ruiz 1971).

Oletetaan, että poikkeaman arvo $y(i, n)$ on laskettu kaikilla i :n arvoilla hetkeen $n = n_1 - 1$ asti. Tällöin aaltoliikemallin toteuttava algoritmi voidaan esittää seuraavasti (Hiller ja Ruiz 1971):

- 1) Laske estimaatti $y(i, n_1 - 1)$:lle poistamalla yhtälöstä (3.14) viimeinen termi

$$\frac{b_3}{\Delta t} [y(i, n+2) - y(i, n-2)],$$

jota ei voida määrätä edellisten tulosten perusteella.

- 2) Laske $y(i, n_1)$.

- 3) Toista askeleet 1) ja 2).

Algoritmi tuottaa riittävän tarkkoja tuloksia vain mikäli $b_3/\Delta t < 1$ (Hiller ja Ruiz 1971).

Yksi osittaisdifferentiaaliyhtälöiden käytön eduista on soittimen eri osien välisten kytkentöjen yksinkertainen kuvaaminen. Ongelmia syntyy lähinnä siksi, että osittaisdifferentiaaliyhtälöiden numeerinen ratkaisu on huomattavan raskas tehtävä. Nykyään tehokkaimmakaan tietokoneet eivät pystyisi tuottamaan reaaliajassa hyvälaatuista synteettistä ääntä osittaisdifferentiaaliyhtälöitä ratkomalla (Wawrzynek 1989).

3.2.2 Elementtimenetelmä

Elementtimenetelmässä värähtelevä rakenne kuvataan mekaanisena järjestelmänä. Myös tämä menetelmä perustuu värähtelevien rakenteiden simulointiin lineaaristen differentiaaliyhtälöiden avulla. Elementtimenetelmässä ei ajatella massan olevan tasaisesti jakautunut värähtelevään rakenteeseen, vaan oletetaan rakenteen koostuvan joukosta pienempiä osia. Tyypiesimerkki elementtimenetelmän käytöstä soitinmallinnuksessa on Ranskassa Grenoblen teknillisessä yliopistossa kehitetty CORDIS-järjestelmä.

CORDIS on 1970-luvun lopulla ja 1980-luvun alussa kehitetty mallinnusjärjestelmä (Cadoz *et al.* 1984, Florens ja Cadoz 1991). Siinä soittimen rakenne kuvataan pistemasoilla sekä elastisuus- ja kitkaominaisuuksilla. Tätä lähestymistapaa kutsutaan toisinaan *äärellisten elementtien menetelmäksi* (engl. finite element method, FEM). Rakenne jae-

taan paikan suhteen pieniin osiin, jotka kuvataan pistemassoina. Rakenteen elastisuus esitetään jousien avulla, ja materiaalin sisäinen sekä ilman aiheuttama kitka mallinnetaan mikrovaimentimilla. Näitä perusosia kytkemällä voidaan rakentaa soitinta mallintavia verkkoja (Florens ja Cadoz 1991). Verkko voi olla yksi- tai moniulotteinen. Tavanomaiden kytkentöjen lisäksi CORDIS-järjestelmään on sisällytetty mahdollisuus luoda ehdollisia kytkentöjä, joiden avulla värähtelyn aiheuttava osa – esimerkiksi jousi, vasara tai plektra – voidaan tilapäisesti liittää verkkoon. Ehdollisen kytkennän avulla voidaan myös mallintaa soittimen värähtelevässä osassa esiintyviä epälineaarisuuksia.

Yksi massa lisää järjestelmään yhtä monta moodia kuin järjestelmällä on vapausasteita (Fletcher ja Rossing 1991). Esimerkiksi tasossa värähtelevällä kielellä on yhtä monta pitkittäistä ja poikittaista moodia kuin siinä on massa-jousipareja. Kun pistemasojen määrää lisätään, alkaa järjestelmässä esiintyä yhä selvemmin aaltoliikettä muistuttavaa käyttäytymistä. CORDIS-mallinnusjärjestelmän tuottaman äänen erot todellisiin ääniin verrattuna voidaan katsoa johtuvan pääasiassa seuraavista syistä (Cadoz *et al.* 1984):

- sinimuotoisten komponenttien määrä on aina sama kuin massapisteiden määrä ja
- komponenttien taajuussuhteet ovat harmoniset vain kun massapisteitä on paljon.

Digitaalista toteutusta varten mekaaninen malli on diskretoitava myös ajan suhteen. Tällöin differentiaaliyhtälöt muutetaan differenssiyhtälöiksi. Esimerkiksi massayksiköön kohdistuvan voiman ja sen poikkeaman välistä yhteyttä kuvaava yhtälö (Cadoz *et al.* 1984)

$$F(t) = M x''(t) \quad (3.15)$$

voidaan diskretoida seuraavasti:

$$F(n) = M x''(n) \quad (3.16)$$

Nopeus hetkellä n voidaan lausua poikkeamien erotusten avulla:

$$x'(n) = x(n) - x(n-1) \quad (3.17)$$

Kiihtyvyys saadaan tällöin seuraavasti:

$$x''(n) = x'(n) - x'(n-1) = x(n) - 2x(n-1) + x(n-2) \quad (3.18)$$

Lopulta yhtälö (3.15) voidaan lausua differenssiyhtälönä:

$$F(n) = M [x(n) - 2x(n-1) + x(n-2)] \quad (3.19)$$

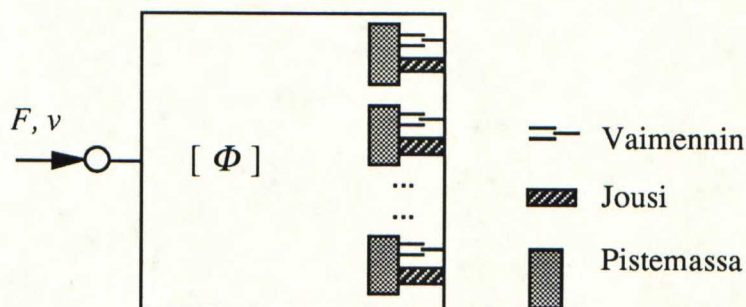
CORDIS-järjestelmä on toteutettu useita kertoja erilaisilla tietokoneilla. Grenoblessa rakennettiin vuonna 1982 erikoisprosessori, CTR (ransk. Cordis-Temps-Reel), joka oli suunniteltu CORDIS-järjestelmään liittyvän laskennan tehokkaaseen suoritukseen. Tällöin pystyttiin ensimmäistä kertaa tuottamaan fysikaaliseen malliin perustuvaa syntetistä ääntä *tosiajassa* (Cadoz *et al.* 1984).

3.2.3 Moodisynteesi

Moodisynteesi (engl. modal synthesis) käyttää hyväkseen mekaanisten värähtelyjen tutkimiseen sovellettua *moodianalyysiä*. Tätä suuntausta on kehitetty erityisesti Pariisissa sijaitsevassa Akustiikan ja musiikin tutkimuskeskuksessa IRCAMissa. Nytkin myös Grenoblessa on tutkittu moodisynteessin mahdollisuuksia (Florens ja Cadoz 1991).

Moodisynteessissä soittimen kukin rakenneosa esitetään sen värähtelymoodien resonanssitaajuuden ja vaimennuskertoimen sekä vapausasteita kuvaavan koordinaattijoukon avulla (Adrien 1991). Lisäksi on kuvattava rakenneosien keskinäinen vuorovaikutus. Rakenne diskretoidaan aivan kuten elementtimenetelmässä, ja periaatteessa värähtelyä voidaankin simuloida yhtäpitävästi laskemalla kunkin massapisteen liikkeitä tai kunkin moodin amplitudia.

Värähtelymoodi on tila, jossa rakenteen jokainen osa värähtelee samalla taajuudella. Moodit eivät yleensä esiinny yksin, sillä ulkoinen voima herättää rakenteessa useita moodeja samanaikaisesti synnyttäen rikkaan spektrin. Jokainen moodi kuvataan yksinkertaisella massa-jousijärjestelmällä eli resonaattorilla, joten malli sisältää yhtä monta resonaattoria kuin alkuperäisessä järjestelmässä on moodeja. Soittimen rakenne voidaan lopulta kuvata resonaattorien rinnankytkentänä (Adrien 1991).



Kuva 3.2 Soittimen esitys moodisynteisiin perustuvassa fysikaalisessa mallissa.

Esimerkiksi häviöttömän värähtelevän kielen moodit voidaan määrittää seuraavan yhtälön avulla (Adrien 1991):

$$f_n = \frac{nc}{2L} \left[\frac{\sin\left(\frac{n\pi}{2(N+1)}\right)}{\frac{n\pi}{2(N+1)}} \right], \text{ missä } n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.20)$$

Yhtälössä L on kielen pituus ja c poikittaisen värähtelyn nopeus kielessä. Kun N on suuri, lähenee resonanssitaajuuksien f_n joukko harmonista sarjaa.

Moodien muodot voidaan esittää vektoreina N -ulotteisessa koordinaatistossa. Seuraava yhtälö antaa n :nnen moodin k :nnen koordinaatin (Adrien 1991):

$$\Phi_k^n = \sin\left(\frac{nk\pi}{N+1}\right), \text{ missä } n, k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.21)$$

Moodien muodot ovat siten siniaallon osia ja monikertoja. Moodien muotoa kuvaavista yhtälöistä kootaan $N \times N$ -matriisi Φ , jota kutsutaan *ohjausmatriisiksi* (engl. control matrix). Teoriassa jatkuvan rakenteen värähtelymoodien sarja on aina ääretön, joten käytännössä osa moodeista on jätettävä pois (Adrien 1991). Tämä vastaa mallin vapausasteiden vähentämistä.

Värähtelevän rakenteen käyttäytyminen voidaan täydellisesti määrätä, kun tunnetaan siihen vaikuttava ulkoinen heräte sekä värähtelijän hetkellinen tila (Adrien 1991). Soittimen heräte on joko ulkoinen mekaaninen voima tai akustinen virtaus. Herätepisteessä vallitseva hetkellinen tila voidaan ilmoittaa massan nopeutena tai paikallisena äänenpaineena. Heräte F ja massan nopeus v liittyvät aaltoyhtälössä esiintyviin paikka- ja aikaderivaattoihin (Adrien 1991) ja niiden suhde on *mekaaninen impedanssi* (Toivanen 1976):

$$Z_m = \frac{F}{v} \quad (3.22)$$

Moodisynteessissä kunkin resonaattorin saama heräte lasketaan projisoimalla ulkoisen voiman F vaikutus resonaattoreihin ohjausmatriisin Φ avulla (kuva 3.2). Resonaattoreihin johtuneesta nopeudesta voidaan ratkaista herätepisteen nopeus v , jota tarvitaan herätteen ja resonaattoreiden vuorovaikutuksen simuloimiseen. Vuorovaikutus on määriteltävä tyypillisesti epälineaarisilla yhtälöillä (Adrien 1991). Numeerista laskentaa varten yhtälöitä saatetaan joutua linearisoimaan.

Yksinkertaisten värähtelevien rakenteiden moodien ominaisuudet voidaan määrittää laskemalla, mutta monimutkaisten järjestelmien moodit täytyy selvittää kokeellisesti (Adrien 1991). Tällöin voidaan käyttää hyväksi lentokone- ja autoteollisuudessa kehitettyjä moodianalyysimenetelmiä. Moodianalyysissä mitataan siirtofunktio rakenteen tiettyjen pisteiden välillä ja lasketaan mittaustulosten perusteella moodien taajuus, vaimennuskerroin sekä ohjausmatriisi Φ (Adrien 1991).

Moodisynteessin etuina voidaan pitää samojen yhtälöiden soveltumista kaikkien moodien laskentaan sekä äänen spektrin helppoa muokkausta (Adrien 1991). Monimutkaisen mekaanisen järjestelmän kuvaaminen elementtimenetelmällä saattaa viedä viikkokausia, mutta moodisynteessillä kuvaus on formalismin homogeenisuuden ansiosta helppo laatia ja työ onnistuu muutamassa päivässä (Adrien 1991). Moodisynteessissä käyttäjällä on mahdollisuus vaikuttaa tuotetun äänen spektriin aivan kuten additiivisessa synteessissä, sillä jokainen resonaattori tuottaa yhden ääneksen. Todettakoon lisäksi, että moodisynteesi soveltuu yhtä hyvin yksi- kuin moniulotteistenkin värähtelijöiden mallintamiseen.

Moodisynteesi voidaan tulkita lähde-suodinmallin laajennukseksi. Mikäli herätteen ja värähtelevän rakenteen välisiä epälineaarisia yhtälöitä ei määritellä, vaan kytkentä on yksisuuntainen, on menetelmä identtinen vähentävässä synteessissä käytetyn rinnakkais-resonaattoripankin kanssa.

4 AALTOJOHTOMALLINNUS

Aaltojohtomallinnus (engl. waveguide modeling) perustuu McIntyren ja Woodhousen esittämään viulun kielen malliin (McIntyre ja Woodhouse 1979). He esittivät, että värähtelevä kieli voidaan mallintaa täydellisesti määrittämällä herätepisteestä nähdessä kielen kummankin pään impulssivasteet eli *heijastusfunktiot* (engl. reflection function). Myöhemmin on todettu, että kun resonaattori oletetaan lineaariseksi, voidaan erilaiset häviöt keskittää yhdeksi matala-asteiseksi suotimeksi (Jaffe ja Smith 1983, Karjalainen ja Laine 1991). Lisäksi aaltojohtomalliin voidaan liittää epälineaarisia komponentteja, joilla on merkittävä osa jousi- ja puhallinsoittimien äänentuottomekanismissa (Smith 1986).

Aaltojohtomallissa oleellinen osa resonaattoria mallinnetaan viivelinjana. Menetelmää kutsutaankin joskus *viivelinjamallinnukseksi* (Florens ja Cadoz 1991). Viipeen toteutus nykyaikaisella signaaliprosessorilla on helppoa ja tehokasta. Siksi aaltojohtomallit ovat huomattavasti tehokkaampia kuin esimerkiksi elementtimenetelmään tai aaltoyhtälöön perustuvat mallit, joissa integroidaan numeerisesti differentiaaliyhtälöitä. Aaltojohtomallinnuksen vakavin rajoitus on sen soveltuvuus ainoastaan yksiulotteisten resonaattorien – käytännössä kielen tai kapean akustisen putken – mallintamiseen.

Aaltojohtomallinnusta voidaan sanoa myös *siirtolinjamallinnukseksi*, jolloin korostetaan sen pohjautuvan samaan piiritekniseen ajattelutapaan, jota sähkötekniikassa on perinteisesti käytetty. Jatkossa esiteltävät mallit voitaisiin luonnollisesti toteuttaa analogisella elektroniikalla. Se ei käytännössä kuitenkaan kannata, sillä mallit on laadittu siten, että ne soveltuvat erityisen hyvin numeeriseen toteutukseen.

4.1 Aaltojohtomallinnuksen fysikaalinen tausta

4.1.1 Akustisen aaltojohtomallinnuksen perussuureet

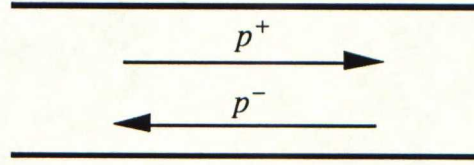
Seuraavassa tarkastellaan akustista putkea, joka saa herätteensä putken päästä. Tarkastelu on helposti sovellettavissa myös poikittaisiin värähtelyihin kielessä.

Aaltojohtomallinnuksen lähtökohta on homogeenisessa aaltojohtomallissa etenevän yksiulotteisen aaltoliikkeen esittäminen kahden vastakkaiseen suuntaan kulkevan aallon avulla. Mallinnettavaksi suureeksi voidaan valita joko äänipaine p tai tilavuusnopeus q .

Kokonaisäänipaine p saadaan vastakkaisiin suuntiin etenevien paineiden, p^+ :n ja p^- :n, summana (ks. kuva 4.1):

$$p(x, t) = p^+(t - \frac{x}{c}) + p^-(t + \frac{x}{c}) \quad (4.1)$$

missä p on akustinen painesignaali, x etäisyys homogeenisen aaltojohtoon alusta ja c äänennopeus.



Kuva 4.1 Äänipaineen eteneminen aaltojohtossa esitetään kahden vastakkaiseen suuntaan etenevän komponentin, p^+ ja p^- , avulla.

Tilavuusnopeus on vektorisuure, ja positiiviseen suuntaan etenevä tilavuusnopeus on *positiiviseen* suuntaan osoittavan yksikkösuuntavektorin ja tilavuusnopeuden suuruuden tulo:

$$\bar{q}^+(x, t) = q^+(x, t) \bar{u}^+ \quad (4.2)$$

Negatiiviseen suuntaan etenevä tilavuusnopeus on puolestaan *negatiiviseen* suuntaan osoittavan yksikkösuuntavektorin ja tilavuusnopeuden suuruuden tulo:

$$\bar{q}^-(x, t) = q^-(x, t) \bar{u}^- \quad (4.3)$$

Kokonaistilavuusnopeus on positiiviseen ja negatiiviseen suuntaan etenevien tilavuusnopeuden komponenttien summa (ks. kuva 4.2):

$$\bar{q}(x, t) = \bar{q}^+(x, t) + \bar{q}^-(x, t) \quad (4.4)$$

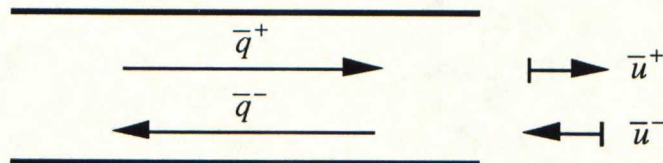
Yleensä kiinnostava suure on tilavuusnopeuden itseisarvo, joka saadaan seuraavasti:

$$|\bar{q}(x, t)| = q(x, t) = \bar{q}^+(t - \frac{x}{c}) |\bar{u}^+| + \bar{q}^-(t + \frac{x}{c}) |\bar{u}^-| \quad (4.5)$$

Koska suuntavektorit osoittavat vastakkaisiin suuntiin, on niiden itseisarvon etumerkkien oltava vastakkaiset. Tällöin saadaan:

$$q(x, t) = q^+(t - \frac{x}{c}) - q^-(t + \frac{x}{c}) \quad (4.6)$$

Kokonaistilavuusnopeuden itseisarvo saadaan siten vastakkaisiin suuntiin etenevien tilavuusnopeuksien itseisarvojen erotuksena.



Kuva 4.2 Tilavuusnopeuden eteneminen aaltojohtossa esitetään kahden vastakkaiseen suuntaan etenevän vektorikomponentin avulla.

Äänipaineen ja tilavuusnopeuden välinen suhde voidaan kuvata aaltojohtoon *akustisen impedanssin* Z_0 avulla. Samaa suuntaa etenevien äänipaineen ja tilavuusnopeuden suhde voidaan esittää seuraavalla tavalla:

$$p^+(t - \frac{x}{c}) = Z_0 q^+(t - \frac{x}{c}) \quad (4.7)$$

ja toisaalta:

$$p^-(t + \frac{x}{c}) = Z_0 q^-(t + \frac{x}{c}) \quad (4.8)$$

Häviöttömässä putkessa etenevässä tasoaallossa äänipaine ja tilavuusnopeus ovat samassa vaiheessa eli aaltojohtoon akustinen impedanssi Z_0 on reaalinen suure, jonka imaginaariosa on nolla. Tällöin voidaan puhua akustisesta resistanssista.

4.1.2 Heijastusfunktio

Paine p^+ voidaan määritellä putken alkupäästä lähteväksi paineeksi ja p^- putken lopusta alkuun saapuvaksi paineeksi. Lineaarisen aaltojohtoon ominaisuudet voidaan tällöin esittää herätteen p^+ ja vasteen p^- avulla: aaltojohtoon syötetään hetkellä $t = 0$ kohdasta $x = 0$ Diracin deltafunktioita $\delta(t)$ approksimoiva lyhyt painepulssi. Tyypillisesti aaltojohtoon toinen pää aukeaa vapaaseen ilmaan, jolloin osa pulssin energiasta säteilee ulos ja osa heijastuu takaisin palatakseen alkupäähän. Palaava, aaltojohtoon toisessa päässä tapahtuvan heijastuksen vaikutuksesta suodattunut pulssi kuvaa täydellisesti käsiteltävän homogeenisen aaltoputken ominaisuudet (McIntyre *et al.* 1983):

$$p^-(t) = r(t) \quad , \text{ kun } p^+(t) = \delta(t) \quad (4.9)$$

missä $r(t)$ on *heijastusfunktio* (engl. reflection function), joka on määritelty sellaiseksi kohdassa $x = 0$ havaittavaksi painesignaaliksi, joka saadaan kun aaltojohtoon syötetään impulssi ja putken alkupää on päätetty ideaalisella absorbentilla, jolloin uusia heijastuksia ei tapahdu (McIntyre *et al.* 1983). Viulun kielen yhteydessä heijastusfunktioista käytetään nimitystä *kulmanpyöristysfunktio* (engl. corner-rounding function) (McIntyre ja Woodhouse 1979). Heijastusfunktioille pätee *kausaalisuusehto*:

$$r(t) = 0 \quad , \text{ kun } t < 0 \quad (4.10)$$

Häviötöntä, toisesta päästä avointa putkea luonnehtivan heijastusfunktion kokonaisalan on oltava -1 :

$$A = \int_0^\infty r(t') dt' = -1 \quad (4.11)$$

Häviöllisessä putkessa heijastusfunktion kokonaisalalle pätee $|A| < 1$.

Koska aaltojohto oletetaan lineaariseksi järjestelmäksi, pätee sille *superpositioperiaate*. Täten voidaan esittää yleinen yhtälö, joka kuvaa alkupäähän palaavan heijastuneen signaalin p^- riippuvuuden herätteestä p^+ (McIntyre *et al.* 1983):

$$p^-(t) = p^+(t) * r(t) = r(t) * p^+(t) = \int_0^\infty r(t') p^+(t - t') dt' \quad (4.12)$$

missä tähti (*) tarkoittaa konvoluutiota ja t' on konvoluutiointegraalissa tarvittava apumuuttuja.

Heijastusfunktio kuvaa akustisen impedanssin muutoksen vaikutuksen ääniaallon etenemiseen ja se voidaan määrittää taajuusalueessa seuraavasti:

$$R(\omega) = \frac{Z_t(\omega) - Z_0}{Z_t(\omega) + Z_0} \quad (4.13)$$

missä Z_0 on aaltojohtoon akustinen resistanssi ja $Z_t(\omega)$ on aaltojohtoon *tuloimpedanssi* (engl. input impedance) eli akustinen impedanssi aaltojohtoon alkupäästä nähtynä. Tuloimpedanssi $Z_t(\omega)$ on määritelmän mukaan äänipaineen p ja tilavuusnopeuden q Fourier-muunnosten osamäärä:

$$Z_t(\omega) = \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} \quad (4.14)$$

missä Fourier-muunnokset on määritelty seuraavasti:

$$P(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} p(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.15)$$

$$Q(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} q(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.16)$$

Putken avoimen päään impulssivaste $r(t)$ eli heijastusfunktio aika-alueessa saadaan yhtälön (4.14) käänteisen Fourier-muunnoksen avulla (Schumacher 1981):

$$r(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.17)$$

Heijastusfunktio on luonteeltaan alipäästösuodin, sillä putken avoin pää heijastaa erityisen hyvin äänipaineaallon pientaajuisia komponentteja ja suurtaajuiset komponentit säteilevät tehokkaasti ulos, kuten kappaleessa 2.2.5 esitettiin.

4.1.3 Impulssivasteen ja heijastusfunktion suhde

Heijastusfunktiota $r(t)$ ei pidä sekoittaa aaltojohtoon impulssivasteeseen eli *Greenin funktioon* $g(t)$, joka on edellä esitetyn tuloimpedanssin $Z_t(\omega)$ käänteinen Fourier-muunnos (Schumacher 1981):

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Z_t(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.18)$$

Greenin funktio $g(t)$ on impulssivaste eli järjestelmän vaste Diracin deltafunktiolle, kuten heijastusfunktiokin, mutta $g(t)$:tä mitattaessa aaltojohdossa etenevän värähtelyn annetaan vapaasti heijastua aaltojohdon molemmista päistä (Schumacher 1981). Äänipaine $p(t)$ aaltojohdon alkupäässä saadaan laskettua Greenin funktion $g(t)$ ja tilavuusnopeuden $q(t)$ konvoluutiona (Schumacher 1981):

$$p(t) = g(t) * q(t) = \int_0^{\infty} g(t') q(t - t') dt' \quad (4.19)$$

missä t' on konvoluutiointegraalin apumuuttuja.

Yksiulotteisen resonaattorin Greenin funktio $g(t)$ ja heijastusfunktio $r(t)$ ovat aika-alueessa identtiset pienillä t :n arvoilla (Schumacher 1981). Funktiot alkavat erota toisistaan ensimmäisen negatiivisen pulssin eli päätyheijastuksen jälkeen noin hetkellä $t = 2L/c$, missä L on resonaattorin pituus ja c on äänen nopeus. Tämän jälkeen heijastusfunktion arvo pienenee ja jää lopulta nolnaan noin hetkellä $t = 4L/c$ (Schumacher 1981). Greenin funktiossa sen sijaan esiintyy samalla hetkellä uusi pulssi, joka vastaa heijastusta resonaattorin alkupäästä. Puoliaaltoresonaattorissa pulssi on negatiivinen ja neljännesaaltoresonaattorissa positiivinen. Greenin funktiossa esiintyvät päätyheijastuksista johtuvat pulssit vaimenevat vähitellen, ja lopulta sen arvo lähenee nolaa.

Heijastusfunktio $r(t)$ on laskennallisessa mallinnuksessa huomattavasti edullisempi kuin Greenin funktio $g(t)$, sillä $r(t)$ poikkeaa nolasta huomattavasti lyhyemmän ajan kuin $g(t)$ (Schumacher 1981). Mikäli käytettäisiin Greenin funktiota $g(t)$, pitäisi jokaisen konvoluutiointegraalin (4.19) yhteydessä integroida kymmenien värähtelyjaksojen ajalta. Heijastusfunktio $r(t)$ puolestaan vaimenee nolnaan yleensä yhden jakson aikana. Greenin funktion ja heijastusfunktion kestojen suhde selittyy formaalisti tarkastelemalla yhtälöä (4.13), joka kertoo funktioiden Fourier-muunnosten suhteen. Voidaan olettaa, että $R(\omega)$ on tuloimpedanssia $Z_t(\omega)$ yksinkertaisempi rationaalipolynomi, sillä sekä yhtälön (4.13) osoittajassa että nimittäjässä esiintyvä tuloimpedanssi $Z_t(\omega)$ eli Greenin funktion Fourier-muunnos aiheuttaa napojen kumoutumisen (McIntyre *et al.* 1983).

Värähtelevän kielen mallinnuksessa McIntyre ja Woodhouse (1979) määrittävät erikseen kielen kummankin pään heijastusfunktion herätepisteestä nähdessä. Aaltojohtomallinnuksessa tilannetta pyritään monesti yksinkertaistamaan siten, että yksiulotteinen resonaattori kuvataan yhdellä heijastusfunktioilla. Lisäksi aaltojohtomalleissa ei laskennan työläyden takia haluta laskea heijastusfunktion konvoluutiota herätteen kanssa, vaan heijastusfunktioa approksimoidaan yksinkertaisemmalla digitaalisuotimella. Suuri osa resonaattoria voidaan pelkistää viipeeksi, mikä on aaltojohtomallinnuksen tehokkuuden salaisuus. Tällöin saadaan aikaan järjestelmä, jonka astelukku on korkea, mutta vapausasteiden määrä pieni (Smith 1983).

4.2 Jatkuvan järjestelmän aikadiskreetti mallintaminen

Laskennallisessa mallintamisessa on oleellista kuinka muutetaan ajan suhteen jatkuva järjestelmä vastaavaksi *aikadiskreetiksi järjestelmäksi* (engl. discrete-time system). Jatkuvan järjestelmän näytetaajuus voidaan tulkita äärettömän suureksi eli näyteväli infinitesimaalisen pieneksi. Aikadiskreetissä mallissa näytetaajuus on äärellinen, joten näytteenotossa on kyse näytetaajuuden pudottamisesta.

Nyqvistin näytteenottoteoreeman mukaisesti aikadiskreetti järjestelmä pystyy ilman laskostumista tuottamaan ainoastaan taajuuksia, jotka ovat alle puolet näytetaajuudesta. Diskreettiäikäisen järjestelmän näytetaajuus on siksi valittava riittävän korkeaksi. Äärellisen näytteenottovälin vuoksi järjestelmän taajuusvaste on jaksollinen. Siksi aikajatkuvan järjestelmän impulssi- ja taajuusvastetta ei voida samanaikaisesti täsmällisesti jäljitellä. Yleensä jatkuva järjestelmä diskretoidaan joko *impulssi-invariantilla menetelmällä* (engl. impulse-invariant method), joka säilyttää järjestelmän impulssivasteen näytepisteissä aiheuttaen samalla laskostumista taajuusalueessa, tai *bilineaarimuunnoksella* (engl. bilinear transform), joka säilyttää taajuusvasteen pienillä taajuuksilla, mutta vääristää impulssivastetta. Seuraavassa esitellään kuinka jatkuva järjestelmä voidaan diskretoida aaltojohtomallin laatimisen yhteydessä.

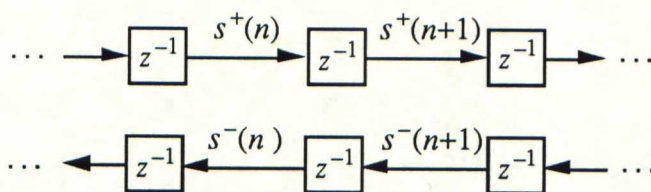
4.2.1 Homogeenisen aaltojohdon aikadiskreetti malli

Aaltojohto voidaan diskretoida ottamalla siitä näytteitä riittävän lyhyin väliajoin. Aaltojohdon näytteistämisessä on otettava huomioon näytteenottoteoreema kuten aina signaalia tai järjestelmää diskretoitaessa. Kun näyteväli T on valittu on huolehdittava siitä, ettei aaltojohtoon syötetä Nyqvist-taajuutta $1/2T$ suurempia taajuuksia.

Näytteenoton jälkeen signaalin $s(t)$ arvo, joka voi edelleen olla sopimuksen mukaan joko reaali- tai imaginaariluku, tiedetään hetkillä $s(nT)$, missä T on näyteväli ja n kokonaislukuindeksi. Käytännössä aikadiskreetin signaalin ajanhetki esitetään ainoastaan indeksin n avulla. Näin menetellään redundanssin vähentämiseksi, sillä näytetaajuus $1/T$ ilmoitetaan yleensä erikseen aikadiskreeteistä järjestelmistä puhuttaessa. Aikadiskreetti signaali kirjoitetaan siksi yleensä muodossa $s(n)$.

Aikadiskreetin signaalin amplitudi voi saada arvoja jatkuvalla välillä eli signaali on edelleen analoginen. Kun aikadiskreetti signaali talletetaan muistiin äärellisellä tarkkuudella, kvantisoituu sen amplitudi ja signaalin sanotaan olevan *digitaalinen*.

Yksiulotteisen aaltojohdon aikadiskreetti esitystapa on *kaksisuuntainen viivelinja* (engl. bidirectional delay line), joka koostuu jonosta yksikköviive-elimistä (ks. kuva 4.3). Yksikköviive on operaattori, joka aiheuttaa signaalinäytteen viivästymisen näytevälin T verran. Kuvassa 4.3 yksikköviiveet on kuvattu merkinnällä z^{-1} . Merkintätapa johtuu siitä, että yksikköviiveen impulssivaste on digitaalinen yksikköimpulssi $\delta(n)$, jonka z -muunnos on z^{-1} .



Kuva 4.3 Aikadiskreetti aaltojohto voidaan esittää kaksisuuntaisen viivelinjan avulla.

4.2.2 Impulssi-invariantti menetelmä

Jatkuva järjestelmä voidaan diskretoida ottamalla sen impulssivasteesta $h(t)$ näytteitä riittävän lyhyin välein T (Parks ja Burrus 1987, Kraniuskas 1992). Tällöin yhteys aikadiskreetin ja alkuperäisen järjestelmän impulssivasteen välillä on:

$$h_d(n) = h(nT) \quad (4.20)$$

missä T on näyteväli sekunteina. Menetelmällä saatavan diskreetin järjestelmän impulssivaste $h_d(n)$ on siten identtinen impulssivasteen $h(t)$ kanssa näytepisteissä, mistä nimitys impulssi-invariantti menetelmä juontuu.

Impulssi-invariantti menetelmä kuvaa periaatteessa siirtofunktion erikoispisteet, nollat ja navat, vastaaviin kohtiin diskreettiaikaisen järjestelmän siirtofunktioon. Jatkuvan järjestelmän s -tasossa sijaitsevat navat kuvautuvat z -tasoon seuraavasti:

$$s_i = e^{p_i T} \quad (4.21)$$

Yhteys s -tason nollien σ_i ja z -tasoon kuvautuvien nollien z_i välillä on monimutkaisempi, sillä yleisessä tapauksessa nollien sijainti z -tasossa riippuu s -tason napojen paikoista (Kraniuskas 1992).

Yhteys alkuperäisen järjestelmän siirtofunktion $H(j\omega)$ ja impulssi-invariantilla menetelmällä saadun siirtofunktion $H_d(j\omega)$ välillä on:

$$H_d(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H(j\omega - jk\omega_s) \quad (4.22)$$

missä $\omega_s = 2\pi/T$ on näytetaajuus radiaaneina. Yhtälön (4.22) mukaan aikadiskreetti taajuusvaste $H_d(j\omega)$ koostuu alkuperäisen vasteen $H(j\omega)$ taajuusalueessa siirrettyjen kopioiden summasta. Täten diskretoinnin yhteydessä näytetaajuutta suuritaajuisemmat komponentit laskostuvat käytössä olevalle kaistalle. Siksi impulssi-invariantti menetelmä ei sovi ylipäästötyyppisten siirtofunktioiden simuloimiseen (Parks ja Burrus 1987, Kraniuskas 1992). Mikäli mallinnettavan järjestelmän taajuusvaste on kaistarajoitettu, voidaan menetelmää käyttää, kun valitaan riittävän korkea näytetaajuus.

4.2.3 Bilineaarimuunnos

Jatkuva järjestelmä voidaan muuttaa aikadiskreettiin muotoon laskostumisilmiö välttämättä, kun käytetään bilineaarimuunnosta (Jackson 1986, Parks ja Burrus 1987). Yleensä jatkuva järjestelmä kuvataan Laplace-muunnoksen avulla ja vastaava aikadiskreetti järjestelmä z -muunnoksen avulla. Kompleksimuuttujien s ja z välinen suhde on seuraava:

$$z = e^{sT} = e^{(\sigma + j\omega)T} \Leftrightarrow s = \frac{1}{T} \ln(z) \quad (4.23)$$

missä σ ja ω ovat kompleksimuuttujan s reaali- ja imaginaariosa ja T on näytteenottoväli. Valitettavasti yhteys ei ole yksikäsitteinen, sillä muuttuja z on periodinen kulmataajuuden ω suhteen.

Yksikäsitteinen kuvaus Laplace- ja z -tason välillä voidaan johtaa kuvaamalla kompleksimuuttuja s ensin s -tason osalle, joka rajoittuu välille $-\pi/T \leq \text{Im}(s') \leq \pi/T$. Periaatteessa tällaisia kuvauksia on olemassa ääretön määrä. Bilineaarimuunnoksen yhteydessä käytetty kompressio on seuraavanlainen (esim. Jackson 1986):

$$s' = \frac{2}{T} \operatorname{arctanh}\left(\frac{sT}{2}\right) \quad (4.24)$$

Yhtälö (4.24) voidaan ratkaista s :n suhteen, jolloin saadaan:

$$s = \frac{2}{T} \tanh\left(\frac{sT}{2}\right) \quad (4.25)$$

Kun sijoitetaan yllä olevaan yhtälöön s' :n kohdalle z :n ja s :n yhteys yhtälöstä (4.23), saadaan:

$$s = \frac{2}{T} \tanh\left[\frac{\ln(z)}{2}\right] = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) = \frac{2}{T} \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) \quad (4.26)$$

missä on käytetty hyväksi hyperbolisen tangentin esitystä eksponenttifunktion avulla:

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \quad (4.27)$$

Yhtälöstä (4.26) saadaan muuttujan z suhteen bilineaarinen muunnos:

$$s = \frac{2}{T} \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}\right) = \frac{2}{T} \left(\frac{z - 1}{z + 1}\right) \quad (4.28)$$

Bilineaarimuunnokselle voidaan yksikäsitteisyyden ansiosta esittää myös *käänteismuunnos*:

$$z = \frac{1 + \frac{T}{2}s}{1 - \frac{T}{2}s} \quad (4.29)$$

Bilineaarimuunnos kuvaa Laplace-tason reaaliakselin z -tasoon yksikköympyrälle, jolloin vasen puolitaso joutuu yksikköympyrän sisälle. Bilineaarimuunnos aiheuttaa epälineaarisen kompression eli *taajuusvääristymän* (engl. frequency warping) kulma-

taajuuden ω suhteen. Kuvaus on monotoninen ja pienillä kulmataajuuden arvoilla vääristymä on vähäistä. On merkittävää, että taajuusasteikon vääristyessä järjestelmän amplitudi- ja vaihevasteen arvot eivät muutu, vaan ne siirtyvät eri taajuudelle. Myös järjestelmän asteluku säilyy bilineaarimuunnoksessa.

Esimerkkinä esitetään toisen asteen järjestelmän muuntaminen aikadiskreetiksi. Toisen asteen järjestelmän Laplace-siirtofunktion yleinen muoto on:

$$H(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \quad (4.30)$$

Vastaava toisen asteen z -tason siirtofunktio on:

$$H(z) = \frac{\beta_2 z^{-2} + \beta_1 z^{-1} + \beta_0}{\alpha_2 z^{-2} + \alpha_1 z^{-1} + \alpha_0} \quad (4.31)$$

missä bilineaarimuunnoksen avulla lasketut kertoimet ovat:

$$\alpha_0 = a_0 T^2 + 2a_1 T + 4a_2$$

$$\alpha_1 = 2a_0 T^2 + 8a_2$$

$$\alpha_2 = a_0 T^2 - 2a_1 + 4a_2$$

$$\beta_0 = b_0 T^2 + 2b_1 T + 4b_2$$

$$\beta_1 = 2b_0 T^2 + 8b_2$$

$$\beta_2 = b_0 T^2 - 2b_1 + 4b_2$$

Bilineaarista muunnosta kannattaa useissa tapauksissa soveltaa jatkuvan järjestelmän napoihin ja nolliin (Jackson 1986). Tämä on mahdollista, koska muunnoksessa koko s -taso erikoispisteineen kuvataan z -tasoon. Jatkuvan järjestelmän siirtofunktio kannattaa tällöin kirjoittaa seuraavaan muotoon:

$$H(s) = K \frac{\prod_{m=1}^M (s - \sigma_m)}{\prod_{n=1}^N (s - s_n)} \quad (4.32)$$

missä K on vahvistuskerroin. Bilineaarimuunnoksella saatava z -tason siirtofunktio on tässä tapauksessa seuraavanlainen:

$$H(z) = b_0 (1 + z^{-1})^{N-M} \frac{\prod_{m=1}^M (1 - z_m z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - p_n z^{-1})} \quad (4.33)$$

$$\text{missä } z_m = \frac{1 + \frac{T}{2} \sigma_m}{1 - \frac{T}{2} \sigma_m} \quad \text{ja} \quad p_n = \frac{1 + \frac{T}{2} s_n}{1 - \frac{T}{2} s_n}.$$

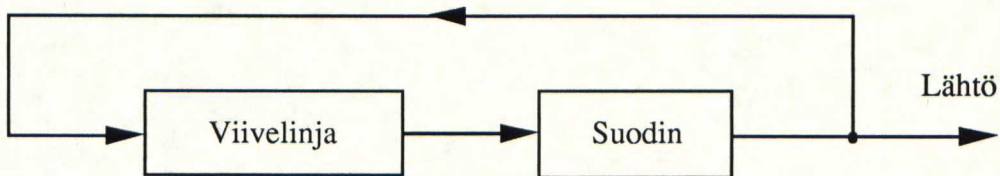
Kerroin b_0 saadaan määrittämällä järjestelmän vahvistus halutulla taajuudella samaksi kuin alkuperäisessä jatkuvassa järjestelmässä. Yhtälöön (4.33) on sisällytetty $N - M$ nollaa, jotka kuvautuvat z -tason yksikköympyrälle kohtaan $z = -1$.

4.3 Värehtelevän kielen mallintaminen

Edellä luvussa 3 on esitetty kuinka värehtelevä kieli voidaan mallintaa erilaisilla menetelmillä. Aaltojohtomallinnus soveltuu luontevasti kielen mallintamiseen. Seuraavassa esitetään kaksi tarkkuudeltaan erilaista kielen äänen synteysiin soveltuvaa algoritmia.

4.3.1 Karplus-Strong -algoritmi

Kevin Karplus ja Alex Strong julkaisivat vuonna 1983 artikkelin, jossa esiteltiin yksinkertainen algoritmi värehtelevän kielen äänen synteysiin (Karplus ja Strong 1983). Menetelmää ei voitane kutsua fysikaaliseksi malliksi, sillä sen lähtökohtana on aaltotaulukkosynteesi. Myöhemmin sen kuitenkin havaittiin olevan yksinkertainen erikoistapaus McIntyren, Woodhousen ja Schumacherin esittämästä fysikaalisesta värehtelevän kielen mallista (Smith 1991a).



Kuva 4.4 Taulukon modifiointiin perustuvan Karplus-Strong -algoritmin lohkokaavio (Karplus ja Strong 1983).

Karplus-Strong -algoritmin keskeinen uusi ajatus on modifioida taulukkosynteesissä kutakin taulukon arvoa rekursiivisesti aina sen lukemisen yhteydessä. Näin vältetään taulukkosynteesiä tavallisesti vaivaava äänen luonnoton yksitoikkoisuus. Karplus-Strong -algoritmin lohkokaavio on esitetty kuvassa 4.4. Koska ainoastaan yhtä taulukon arvoa muutetaan kerrallaan, voidaan taulukko tulkita viivelinjaksi. Kuvassa 4.4 esiintyvä taulukkoa modifioiva suodin voisi olla mikä tahansa lineaarinen digitaalisuodin, mutta tavallisesti käytetään lyhyttä FIR-suodinta. Yksinkertaisin käyttökelpoinen taulukon muokkaukseen soveltuva suodin laskee kahden peräkkäisen näytteen keskiarvoa (Karplus ja Strong 1983), ja tällöin algoritmiin liittyvä laskenta voidaan esittää kokonaisuudessaan seuraavalla differenssiyhtälöllä:

$$y(n) = \frac{1}{2} [y(n - N) + y(n - N - 1)] \quad (4.34)$$

missä N on taulukon koko eli talletettujen näytteiden määrä. Yhtälö (4.34) voidaan tulkita kampasuotimeksi (Gordon 1985) tai järjestelmäksi, joka koostuu viivelinjasta ja ensimmäisen asteen FIR-digitaalisuotimesta.

Keskiarvoa laskevan FIR-suotimen impulssivaste on:

$$h(n) = \frac{1}{2} [x(n) + x(n - 1)] \quad (4.35)$$

ja siirtofunktio z -alueessa:

$$H(z) = \frac{1+z^{-1}}{2} \quad (4.36)$$

Suotimen ainoa nolla sijaitsee Nyqvist-taajuudella ($z = -1$). Kyseessä on alipäästösuo-
din, joka aiheuttaa taulukon hitaan muuttumisen siten, että korkeat harmoniset vaimenevat nopeammin kuin matalat. Ilmiö on analoginen värähtelevän kielen äänessä tapah-
tuvaan spektrin dynaamiseen muuttumiseen, ja siksi Karplusin ja Strongin menetelmä
tuottaa varsin luonnollisen kuuloisia synteettisiä ääniä (Gordon 1985).

On huomattava, että suotimen $H(z)$ ryhmäviive vaikuttaa viivelinjan kokonaispituu-
teen ja siten myös tuotetun äänen vireeseen. Yhtälön (4.36) mukaisen suotimen ryhmä-
viive on $1/2$ yksikköviivettä ($T/2$) koko taajuusalueella, sillä kyseessä on lineaarivaihei-
nen FIR-suodin. Tämä on otettava huomioon viritettäessä mallia esimerkiksi tasavirei-
seen asteikkoon.

Signaalin vaimenemisnopeus riippuu suotimen lisäksi taulukon pituudesta, sillä tau-
lukon ollessa lyhyt signaalin kutakin näytettä suodatetaan useammin kuin pitkässä tau-
lukossa. Lisäksi lyhyt taulukko tuottaa korkean sävelen, jota alipäästösuo-
din vaimentaa enemmän kuin matalia ääniä. Periaatteessa myös oikeassa värähtelevässä kielessä matalat
äänet soivat pitempään kuin korkeat, mutta valitettavasti mallin tuottamat korkeat
äänet vaimenevat liian nopeasti ja matalat puolestaan jäävät soimaan luonnottoman pit-
kään. Käytännön sovelluksissa tämä on otettava huomioon esimerkiksi kertomalla suo-
timen lähtö taulukon pituudesta riippuvalla häviötekijällä tai muuttamalla suotimen ker-
toimia taulukon pituutta muutettaessa (Jaffe ja Smith 1983).

Värähtelevän kielen ääntä jäljiteltäessä herätteeksi on valittava signaali, jonka spekt-
rissä on runsaasti energiaa myös suurilla taajuuksilla. Karplus ja Strong (1983) kehotta-
vat käyttämään *valkoista kohinaa*. Heräte talletetaan taulukkoon sävelen alussa ja anne-
taan vaimentua suotimen vaikutuksesta. Yksi algoritmin erikoisista piirteistä – tyypilli-
siin signaalinkäsittelymenetelmiin verrattuna – onkin yksittäisen sisääntulon puuttumi-
nen.

Kohinaherätteen suhde fysikaaliseen todellisuuteen on kyseenalainen, sillä se vastaa
tilannetta, jossa kieltä lyödään samanaikaisesti joka kohtaan, mutta satunnaisella voi-
malla. Tämän menettelyn on havaittu tuottavan synteettisen äänen alkuun luonnolliselta
kuulostavan hälyäänen, joka sisältää runsaasti energiaa koko taajuuskaistalla. Kampa-
suotimen ansiosta viivelinjassa kiertävä kohina muuttuu vähitellen harmoniseksi ääneksi
(Gordon 1985).

Karplus-Strong -algoritmi on laskennallisesti huomattavan yksinkertainen, ja sen
avulla voidaan tosiajassa tuottaa laadukasta synteettistä ääntä tavallisessa yleiskäyttöi-
sessä tietokoneessa (Karplus ja Strong 1983). Musiikkikäytössä algoritmin perusmuoto
ei ole täysin ongelmaton, sillä korkeiden äänten viritys ei ole tarkka. Tuotetun äänen pe-
rustaajuus määräytyy taulukon pituudesta, joka on aina kokonaisluku. Tästä seuraa, että
äänen perusjakso on näytevälin kokonaislukukerrannainen. Matalien äänien viritys ei
ole kriittinen. Viritysongelma kasvaa äänenkorkeuden funktiona, ja mikäli halutaan

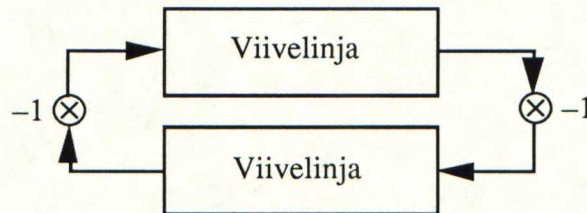
esimerkiksi saada tasavireinen asteikko kuulon kannalta riittävän tarkaksi kitaran koko äänialalla (noin 900 hertziin asti), on näytetaajuuden oltava vähintään 28,6 kHz (Karplus ja Strong 1983).

Viritysongelma voidaan ratkaista *muuttamalla prosessorin kellotaajuutta*, jolloin laskentanopeus ja siten myös datan etenemisnopeus viivelinjassa muuttuu. Tällöin voidaan kuitenkin virittää ainoastaan yksi sävel kerrallaan, mikä rajoittaa järjestelmän monofoniseksi. Ongelma voidaan poistaa käyttämällä viivelinjassa *interpolointia*, jolla lasketaan näytteen arvo taulukon näytepisteiden välillä. Kahta erilaista digitaaliseen suodattukseen perustuvaa interpolointimenetelmää käsitellään kappaleessa 4.5.

Karplus-Strong -algoritmi lienee yksinkertaisin mahdollinen aaltojohtomalli. Sen helppo toteutus ja toisaalta hämmästyttävän todentuntuinen ääni saivat aikanaan tietokonemusiikin parissa työskentelevät ihmiset innostumaan soittimien mallintamisesta.

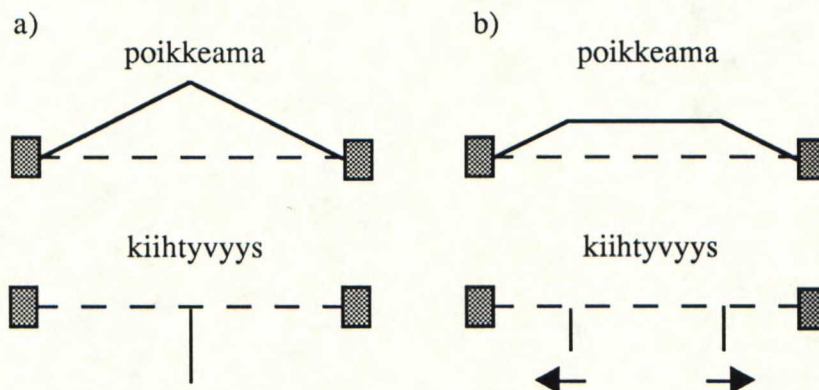
4.3.2 Värähtelevän kielen aaltojohtomalli

Värähtelevälle kielelle on laadittu myös aaltojohtomalleja, jotka vastaavat enemmän todellisuutta kuin Karplus-Strong -malli (Jaffe ja Smith 1983, Smith 1983, Adrien ja Rodet 1985, Karjalainen ja Laine 1991). Kieltä jäljitellään aaltojohtomallissa *kaksisuuntaisella viivelinjalla* eli kahdella eri suuntiin kulkevalla viivelinjalla, joiden päät on kytketty toisiinsa. Ideaalinen kieli voidaan tällöin mallintaa kuvan 4.5 mukaisella järjestelmällä, jossa viivelinjoissa etenevän signaalin suunta vaihtuu kielen päissä ja samalla sen vaihe kääntyy, mikä saadaan aikaan vaihtamalla signaalin kunkin näytteen etumerkki.



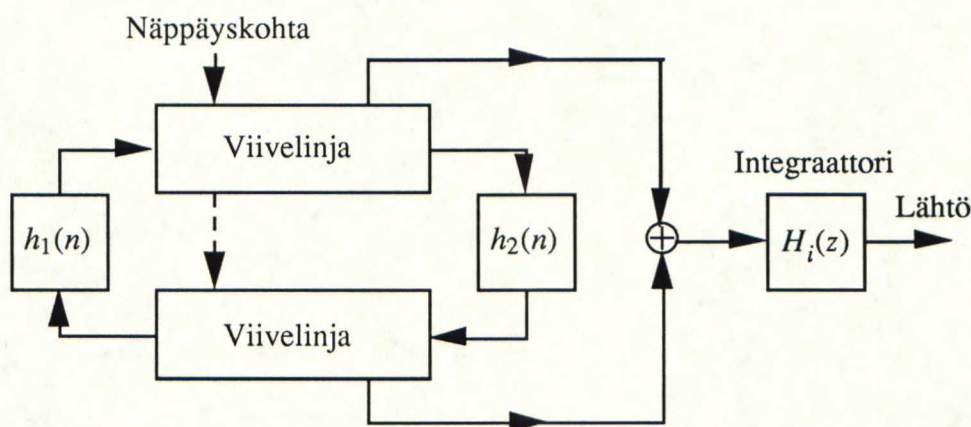
Kuva 4.5 Ideaalisen kielen aaltojohtomalli. Kielen malli koostuu kaksisuuntaisesta viivelinjasta, joka simuloi ainoastaan kielessä etenevän signaalin äärellistä kulkuaikaa. Signaalin vaihe kääntyy päätyheijastusten yhteydessä.

Kielen värähtely esitetään mallissa kielen kunkin näytteenottokohdan *kiihtyvyyden* avulla. Tämä lähestymistapa on todettu tehokkaammaksi kuin kielen eri kohtien poikkeama tai nopeus, sillä kielen näppäys aiheuttaa kieleen kaksi kiihtyvyyssimpulssia, jotka lähtevät etenemään kielessä kohti sen kumpaakin päätä (Smith 1983). Kuvassa 4.6 esitetään kielen poikkeama ja kiihtyvyys kahdella eri hetkellä. Kiihtyvyyssignaali saadaan kielen poikkeamasta *derivoimalla kahdesti* ajan suhteen. Kun mallin tuottamaa signaalia halutaan kuunnella, on se *integroitava*, jotta saataisiin nopeussignaali, joka aiheuttaa korvan ilmaiseman paineenvaihtelun (Karjalainen ja Laine 1991).



Kuva 4.6 Kielen poikkeama ja kiihtyvyys a) näppäyshetkellä ja b) hetkeä myöhemmin.

Kuvassa 4.7 esitetään Karjalaisen ja Laineen (1991) värähtelevän kielen malli kokonaisuudessaan. Kaksisuuntaisen viivelinjan kummassakin päässä on suodin, johon on sisällytetty kaikki kielessä ja päätyheijastuksessa tapahtuvat häviöt. Periaatteessa kahden suotimen käyttö mahdollistaa yksityiskohtaisemman mallin toteuttamisen kuin yksi suodin (McIntyre *et al.* 1983). Suotimet ovat IIR-tyyppisiä ja niiden ryhmäviive riippuu taajuudesta. Siksi viivelinjan pituus ei ole sama kaikilla taajuuksilla. Oikea värähtelevä kieli on aina lievästi dispersiivinen, joten IIR-suodin tarjoaa mahdollisuuden mallintaa myös tätä todellista piirrettä. Jos suotimien ryhmäviive vaihtelisi hyvin rajusti taajuuden funktiona, saattaisivat syntetoidun äänen harmoniset kuulostaa epävireiseltä. Tällaista ongelmaa ei kuitenkaan ole mallin kokeilun yhteydessä havaittu.



Kuva 4.7 Värähtelevän kielen aaltojohtomalli. Näppäyshetkellä molempiin viivelinjoihin sijoitetaan heräte, joka voi olla yksikköimpulssi tai suodatettu impulssi. Viivelinjojen päissä oleviin alipäästösuotimiin h_1 ja h_2 on keskitetty kaikki kielessä tapahtuvat häviöt sekä päätyheijastuksesta johtuva vaiheen kääntäminen. Soiva ääni saadaan integroimalla viivelinjojen vastaavissa kohdissa kulkevien signaalien summa.

Mikäli haluttaisiin mallintaa esimerkiksi kitaraa, olisi koko soitinta jäljittelevässä järjestelmässä oltava kutakin kieltä kohti yksi kielen malli ja lisäksi kuvan 4.6 mallin lähtö olisi syötettävä suotimeen, joka mallintaisi kitaran *kaikukappaa* (Karjalainen ja Laine 1991). *Sympateettiset värähtelyt* voidaan sisällyttää malliin kytkemällä kunkin

kielen lähtö sopivasti vaimennettuna kaikkiin vapaisiin kieliin.

Yllä esitetyn mallin oleelliset erot Karplusin ja Strongin algoritmiin nähden ovat seuraavat:

- 1) kielen malli on realistisempi, koska kielen kumpikin pää on mallinnettu erikseen ja
- 2) mallin heräte on – kohinan sijasta – näppäyskohtaan syötettävä *kiihtyvyyssimpulssi*, joka vastaa läheisemmin kielen fyysistä näppäilyä.

Näistä seikoista johtuen mallin käyttäytyminen on todenmukaisempaa, sillä esimerkiksi näppäyskohdan siirtämisestä seuraa samantapaisia muutoksia kuultavan äänen spektriin kuin oikeassa kielessä: läheltä päätyä näppäiltäessä spektrissä on runsaasti yläsäveliä ja sointi on kirkas. Kun kieltä soitetaan keskeltä, on ääni onnto muistuttaen hieman klarinettia, sillä spektristä puuttuvat parilliset harmoniset. Äänen sointiväri muuttuu myös vaihdettaessa kuuntelupistettä eli sitä viivelinjan kohtaa, josta signaali otetaan lähtöön.

Malliin on syytä liittää interpolaattori, jolla viivelinjan pituutta voidaan säätää portaattomasti (ks. kappale 4.5). Tämä aiheuttaa hiukan lisää laskentaa. Karjalaisen ja Lai-
neen kielimalli on laskennallisesti hieman raskaampi kuin Karplus-Strong -algoritmi, mutta silti sitä voidaan pitää varsin tehokkaana. Malli on toteutettu Texas Instrumentsin TMS320C30-signaaliprosessorilla ja 22,05 kHz:n näytteenottotaajuudella prosessori pystyy simuloimaan reaaliajassa kuutta värähtelevää kieltä. Kaikukopan mallia varten tarvittaisiin toinen prosessori.

4.4 Akustisen putken mallintaminen

Akustisen putken homogeeniset osat voidaan mallintaa viivelinjalla kuten edellä mallinnettiin kieltä, sillä putki ei vaikuta aaltoliikkeeseen lainkaan, kun aaltojohtoon akustinen impedanssi ei muutu. Tällöin aalto ainoastaan viivästyy aaltojohtoon läpi kulkies-
saan.

Useissa tapauksissa joudutaan mallintamaan aaltojohtoa, jonka impedanssi muuttuu. Eripaksuisten aaltojohtojen risteyksen mallia on aiemmin tarvittu *artikulatorisessa puhe-
synteesissä* ja aiheeseen liittyvä teoria onkin alunperin kehitetty ihmisen ääniväylän mallinnusta ajatellen (Fant 1960). Puheenkäsittelyssä saatuja tuloksia voidaan soveltaa myös puhallinsoittimien rungon mallintamiseen.

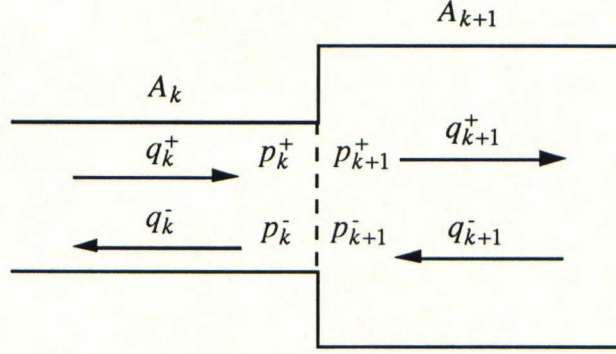
Seuraavassa käsitellään häviötöntä putkea, joten akustinen impedanssi on *reaalinen*. Häviöttömän putken akustinen resistanssi Z_0 on kääntäen verrannollinen putken poikkipinta-alaan ja se voidaan määrittää seuraavasti:

$$Z_0 = \frac{\rho c}{A} \quad (4.37)$$

missä ρ on ilman tiheys, c äänen nopeus ja A putken pinta-ala.

Putkessa etenevä aalto siroaa esimerkiksi putken poikkipinta-alan muuttuessa. Tällöin tapahtuu *sironta* (engl. scattering), jossa osa aallosta pääsee aaltoimpedanssin epä-

jatkuvuuskohdan läpi osan heijastuessa takaisin. Heijastus- ja läpäisykertoimet voidaan johtaa sekä tilavuusnopeudelle että äänipaineelle. Kuvassa 4.8 esitetään käytetyt merkinnät.



Kuva 4.8 Akustisen putken poikkipinta-alan muuttuessa tapahtuu sironta.

4.4.1 Tilavuusnopeuden sironta putken epäjatkuvuuskohdassa

Putken epäjatkuvuuskohdan mallintamisessa tarvittavat tilavuusnopeusaallon heijastus- ja läpäisykertoimet voidaan johtaa seuraavasti (Rabiner ja Schafer 1978, Liljencrantz 1985). Yhtälöiden (4.7) ja (4.8) perusteella voidaan merkitä aaltojohtossa vallitseva kokonaispaine p vastakkaisiin suuntiin etenevien tilavuusnopeuksien q^+ ja q^- avulla:

$$p_k(x,t) = Z_k [q_k^+(t - \frac{x}{c}) + q_k^-(t + \frac{x}{c})] \quad (4.38)$$

missä Z_k on putken aaltoimpedanssi, x etäisyys aaltojohtoon alusta ja c äänen nopeus. Kokonaistilavuusnopeus putkessa k (ks. kuva 4.7) voidaan lausua eri suuntiin etenevien tilavuusnopeuksien avulla:

$$q_k(x,t) = q_k^+(t - \frac{x}{c}) - q_k^-(t + \frac{x}{c}) \quad (4.39)$$

Jotta heijastuskertoimet voitaisiin ratkaista, on määritettävä jatkuvuusehdot äänipaineelle ja tilavuusnopeudelle. Ensimmäinen ehto saadaan vaatimalla, että kokonaispaineen on oltava jatkuva liitoskohdassa (Liljencrantz 1985). Kun putken k pituus on L , voidaan kirjoittaa:

$$p_k(L,t) = p_{k+1}(0,t) \quad (4.40)$$

Lisäksi nettovirtauksen on oltava sama molemmissa putkissa (Liljencrantz 1985). Täten on oltava voimassa:

$$q_k(L,t) = q_{k+1}(0,t) \quad (4.41)$$

Kun yhtälöihin (4.40) ja (4.41) sijoitetaan kokonaispaineet ja tilavuusnopeudet kummassakin putkessa yhtälöiden (4.38) ja (4.39) mukaisesti, saadaan:

$$Z_k [q_k^+(t - \tau) + q_k^-(t + \tau)] = Z_{k+1} [q_{k+1}^+(t) + q_{k+1}^-(t)] \quad (4.42)$$

$$q_k^+(t - \tau) - q_k^-(t + \tau) = q_{k+1}^+(t) - q_{k+1}^-(t) \quad (4.43)$$

Yllä on käytetty merkintää $\tau = L/c$, missä L on putken pituus ja c äänen nopeus putkessa.

Yhtälöistä (4.42) ja (4.43) voidaan ratkaista putken k päästä heijastuva tilavuusnopeus q_k^- . Yhtälöparista on ensin eliminointava q_{k+1}^+ . Tällöin voidaan ratkaista q_k^- :

$$q_k^-(t - \tau) = \frac{Z_{k+1} - Z_k}{Z_{k+1} + Z_k} q_k^+(t - \tau) + \frac{2Z_{k+1}}{Z_{k+1} + Z_k} q_{k+1}^-(t) \quad (4.44)$$

Putkeen $k+1$ etenevän tilavuusnopeuden q_{k+1}^+ lauseke saadaan vastaavasti eliminoimalla q_k^- yhtälöistä (4.42) ja (4.43):

$$q_{k+1}^+(t) = \frac{2Z_k}{Z_{k+1} + Z_k} q_k^+(t - \tau) + \frac{Z_{k+1} - Z_k}{Z_{k+1} + Z_k} q_{k+1}^-(t) \quad (4.45)$$

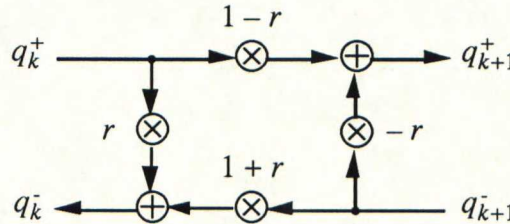
Termin q_k^+ kerroin yhtälössä (4.44) osoittaa kuinka suuri osa tilavuusnopeussignaalista heijastuu takaisin putken k päädyistä. Siten on luonnollista määritellä *heijastuskerroin* r seuraavasti (Kelly ja Lochbaum 1962):

$$r = \frac{Z_{k+1} - Z_k}{Z_{k+1} + Z_k} = \frac{A_k - A_{k+1}}{A_k + A_{k+1}} \quad (4.46)$$

Heijastuskerroin r on heijastuvan ja etenevän tilavuusnopeuden suhde. Häviöttömälle putkelle se on reaalinen vakio. Heijastuskertoimen avulla yhtälöt (4.44) ja (4.45) voidaan lausua selkeämmässä muodossa:

$$q_k^-(t - \tau) = r q_k^+(t - \tau) + (1 + r) q_{k+1}^-(t) \quad (4.47)$$

$$q_{k+1}^+(t) = (1 - r) q_k^+(t - \tau) - r q_{k+1}^-(t) \quad (4.48)$$



Kuva 4.9 Kahden eripaksuisen putken liitoskohdassa tapahtuvaa tilavuusnopeuden sirontaa mallintava Kelly-Lochbaum -risteys.

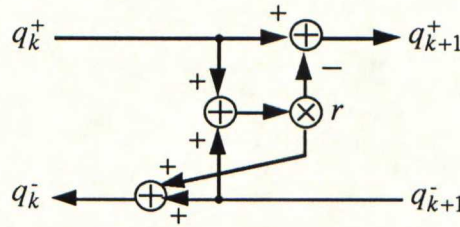
Kahden akustisen putken epäjatkuvuuskohdassa tapahtuva *tilavuusnopeuden* sironta voidaan esittää virtauskaaviona kuvan 4.9 mukaisesti. Tätä sironta-algoritmia kutsutaan usein Kelly-Lochbaum-risteykseksi, koska John Kelly ja Carol Lochbaum julkaisivat sen ensimmäisinä (Kelly ja Lochbaum 1962). Tilavuusnopeudelle johdetut sirontayhtälöt on intuitiivisesti helppo omaksua, sillä on luonnollista olettaa, että epäjatkuvuuskohdassa heijastus- ja läpäisykertoimelle pätee $r + (1 - r) = 1$. Tämä ominaisuus seuraa siitä, että tilavuusnopeuteen liittyy materiaalin siirtymistä eikä impedanssin epäjatkuvuuskohdassa oleteta olevan lähteitä tai nieluja, joissa materiaalin määrä muuttuisi.

Kuvan 4.9 risteys voidaan laskea myös tehokkaammin, koska yhtälöissä (4.47) ja (4.48) ainoastaan tilavuusnopeudet q_k^+ ja q_{k+1}^- kerrotaan heijastuskertoimella r (Rabiner ja Schafer 1978). Tämä on helppo huomata, kun kyseiset yhtälöt kirjoitetaan uudelleen ryhmitellen termit eri tavalla:

$$q_k^-(t - \tau) = r [q_k^+(t - \tau) + q_{k+1}^-(t)] + q_{k+1}^-(t) \quad (4.49)$$

$$q_{k+1}^+(t) = q_k^+(t - \tau) - r [q_k^+(t - \tau) + q_{k+1}^-(t)] \quad (4.50)$$

Kuvassa 4.10 esitetään Kelly-Lochbaum-risteys yhtälöiden (4.49) ja (4.50) mukaisesti. Vertailemalla kuvia 4.8 ja 4.9 voidaan havaita laskutoimitusten kokonaismäärän vähenemiseen kuudesta neljään.



Kuva 4.10 Kelly-Lochbaum-risteys tilavuusnopeudelle tehokkaasti toteutettuna.

4.4.2 Äänipaineen sironta putken epäjatkuvuuskohdassa

Edellä esitettyjä tilavuusnopeuden sirontayhtälöitä vastaavat yhtälöt voidaan johtaa myös *äänipaineelle*. Tällöin putkessa k (ks. kuva 4.8) vallitseva kokonaispaine ja tilavuusnopeus on esitettävä äänipaineen avulla (Liljencrantz 1985):

$$p_k(x, t) = p_k^+(t - \frac{x}{c}) + p_k^-(t + \frac{x}{c}) \quad (4.51)$$

$$q_k(x, t) = \frac{p_k^+(t - \frac{x}{c}) - p_k^-(t + \frac{x}{c})}{Z_k} \quad (4.52)$$

Jatkuvuusehdot ovat luonnollisesti samat kuin tilavuusnopeutta tarkasteltaessa, joten yllä esitetyt lausekkeet voidaan sijoittaa yhtälöihin (4.42) ja (4.43), jolloin saadaan:

$$\frac{p_k^+(t - \tau) - p_k^-(t + \tau)}{Z_k} = \frac{p_{k+1}^+(t) - p_{k+1}^-(t)}{Z_{k+1}} \quad (4.53)$$

$$p_k^+(t - \tau) + p_k^-(t + \tau) = p_{k+1}^+(t) + p_{k+1}^-(t) \quad (4.54)$$

missä on merkitty $\tau = L/c$.

Yhtälöistä (4.53) ja (4.54) saadaan ratkaistua lauseke putkessa k negatiiviseen suuntaan etenevälle paineaallolle p_k^- , kun eliminoidaan p_{k+1}^+ :

$$p_k^-(t - \tau) = \frac{Z_{k+1} - Z_k}{Z_{k+1} + Z_k} p_k^+(t - \tau) + \frac{2Z_k}{Z_{k+1} + Z_k} p_{k+1}^-(t) \quad (4.55)$$

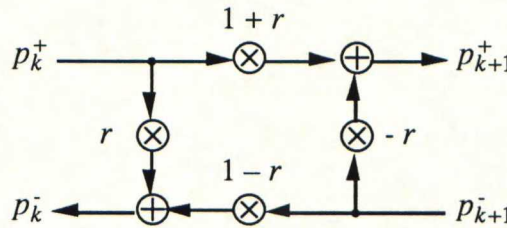
Vastaavasti p_{k+1}^+ :n lauseke saadaan eliminoimalla p_k^- :

$$p_{k+1}^+(t) = \frac{2Z_k}{Z_{k+1} + Z_k} p_k^+(t - \tau) + \frac{Z_k - Z_{k+1}}{Z_{k+1} + Z_k} p_{k+1}^-(t) \quad (4.56)$$

Yhtälöt (4.55) ja (4.56) voidaan esittää myös heijastuskertoimen r (4.46) avulla:

$$p_k^-(t - \tau) = r p_k^+(t - \tau) + (1 - r) p_{k+1}^-(t) \quad (4.57)$$

$$p_{k+1}^+(t - \tau) = (1 + r) p_k^+(t - \tau) - r p_{k+1}^-(t) \quad (4.58)$$



Kuva 4.11 Kahden eripaksuisen putken liitoskohdassa tapahtuvaa äänipaineen sirontaa mallintava Kelly-Lochbaum-risteys (Kelly ja Lochbaum 1962).

Kuvassa 4.11 esitetään virtauskaaviona äänipaineen sirontaa mallintava risteys. Huomautettakoon, että äänipaineelle johdetut sirontayhtälöt eivät ole intuitiivisesti yhtä yksinkertaisia käsittää kuin tilavuusnopeudelle johdetut ($r + 1 + r \neq 1$), sillä paineaaltoon ei liity materiaalin siirtymistä (Liljencrantz 1985). Lisäksi kannattaa oivaltaa, että myös äänipaineelle johdettu risteys on mahdollista esittää laskennallisesti tehokkaammassa muodossa, aivan kuten edellä esitettiin tilavuusnopeuden tapauksessa (ks. kuva 4.10).

Huomautettakoon, että kirjallisuudessa annetut esitykset edellä kuvatuista sirontayhtälöistä sisältävät epätietoisuutta aiheuttavia etumerkkieroja. Yllä esitetty johto vastaa Fletcherin ja Rossingin (1991) sekä Liljencrantzin (1985) antamia yhtälöitä. Esimerkiksi Rabiner ja Schafer (1978) ovat valinneet heijastuskertoimen (4.46) etumerkin toisin, jolloin myös sirontayhtälöiden kerrointen merkit ovat muuttuneet.

4.4.3 Homogeenisen putken aaltojohtomalli

Puhallinsoittimen runko voidaan mallintaa ideaalisena siirtolinjana eli aaltojohtona, kun jätetään huomiotta putken seinämien läheisyydessä tapahtuvat häviöt sekä sormiaukot. Ideaalinen aaltojohto ei vaikuta ääniaallon etenemiseen lainkaan, joten sen ainoa mallinnettava ominaisuus on etenemisviive. Täten runko voidaan mallintaa kahdella vastakkaissuuntaisella viivelinjalla, kuten edellä meneteltiin kielen suhteen.

Putken avoimen päädyn kohdalla putkessa etenevä aalto heijastuu osittain takaisin ja osittain säteilee ulos vapaaseen tilaan. Syynä on putken avoimen pää aiheuttama impedanssin muuttuminen. Putken päätä tarkasteltaessa voidaan tukeutua edellä esitettyihin sirontayhtälöihin. Toteutuksen kannalta on oleellista, että putkesta ulos näkyvä säteilyimpedanssi ei ole reaalinen, kuten mainituissa sirontayhtälöissä, vaan kompleksinen eli taajuudesta riippuva. Reaalisen heijastuskertoimen r sijasta onkin nyt käytettävä taajuusalueessa määriteltyä heijastusfunktiota $R(\omega)$, jonka määritelmä esitettiin yhtälös-

sä (4.13). Putken päädyn *heijastusfunktio* on:

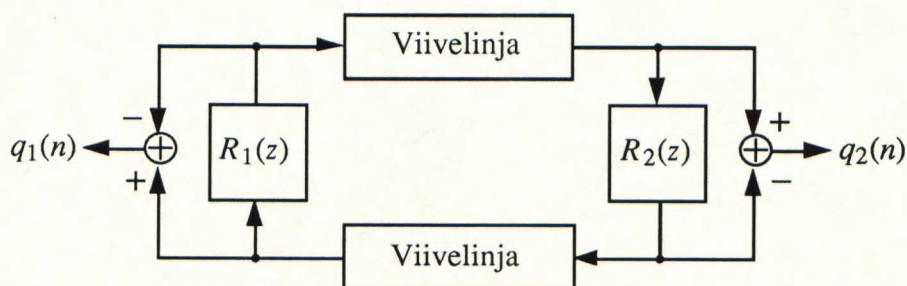
$$R(\omega) = \frac{Z_r(\omega) - Z_0}{Z_r(\omega) + Z_0} \quad (4.59)$$

missä $Z_r(\omega)$ on putken pään *säteilyimpedanssi* ja Z_0 on putken akustinen resistanssi.

Käytännössä heijastuminen ja säteily voidaan mallintaa yhdellä alipäästösuotimella, joka vastaa heijastusfunktiota $R(\omega)$. Tämä on mahdollista, sillä *läpäisyfunktio* (engl. transmission function) $T(\omega)$ voidaan määrittää *tilavuusnopeudelle* yhtälön (4.48) perusteella, kun heijastuskerroin r korvataan taajuuden funktiona määritellyllä heijastusfunktiolla $R(\omega)$. Läpäisyfunktio $T(\omega)$ esittää tässä tapauksessa kuinka suuri osa impedanssin epäjatkuvuuskohtaan saapuvasta tilavuusnopeudesta pääsee läpi.

$$T(\omega) = 1 - R(\omega) \quad (4.60)$$

Kuvassa 4.12 esitetään molemmista päistä avoimen putken aaltojohtomalli tilavuusnopeuden avulla. Aikajatkuvan funktion muuttaminen diskreettiaikaiseksi on esitetty kappaleessa 4.2. Putken päiden heijastusfunktiot $R_1(z)$ ja $R_2(z)$ ovat tasapaksun putken tapauksessa keskenään identtiset.



Kuva 4.12 Tilavuusnopeusaallon avulla laadittu aaltojohtomalli akustiselle putkelle. Signaalit $q_1(n)$ ja $q_2(n)$ ovat putken päistä ulos säteilevät tilavuusnopeudet ja $R_1(z)$ ja $R_2(z)$ ovat putken päiden heijastusfunktiot.

Lisäksi on huomattava, että ihmisen korva on paineanturi, joka havaitsee äänipaineen muutoksia ja siksi putkesta säteilevä tilavuusnopeus on muutettava äänipaineeksi. Monopolitilavuusnopeuslähteen $q e^{j\omega t}$ aiheuttama äänipaine kaukokentässä saadaan seuraavasti (Toivanen 1976):

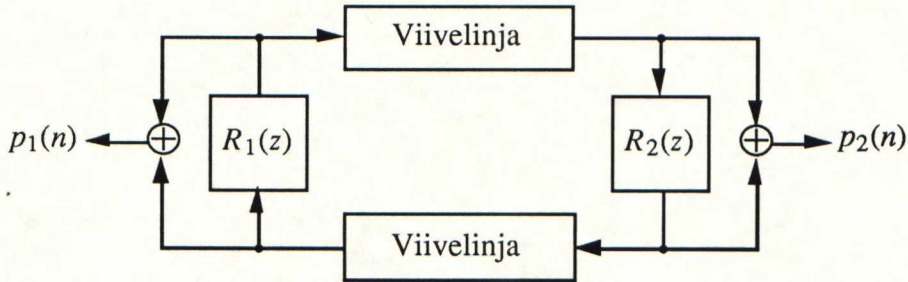
$$p = \frac{j\omega \rho q}{4\pi r} e^{j\omega t} \quad (4.61)$$

missä ρ on ilman tiheys ja r havaintopisteen etäisyys lähteestä. Osoittajassa esiintyvä termi $j\omega$ on derivointioperaattorin Fourier-muunnos, joten äänipaine saadaan *derivoimalla* lähteen tilavuusnopeus. Käytännössä derivointioperaatiota approksimoidaan liitteessä B.1 esitettävällä tavalla differenssillä.

Akustisen putken aaltojohtomalli voi perustua joko äänipaine- tai tilavuusnopeus-aaltoihin (Liljencrantz 1985, Smith 1986). Läpäisyfunktio $T(\omega)$ *äänipaineelle* voidaan johtaa yhtälöstä (4.58), kun heijastuskerroin r korvataan heijastusfunktiolla $R(\omega)$:

$$T(\omega) = 1 + R(\omega) \quad (4.62)$$

Kuvassa 4.12 esitetään avoimen putken aaltojohtomalli äänipaineen avulla.

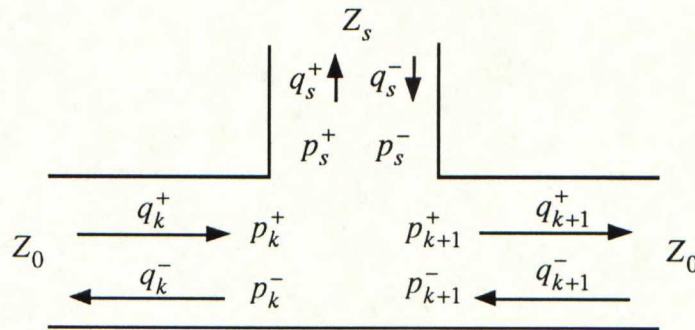


Kuva 4.13 Paineaallon avulla laadittu aaltojohtomalli akustiselle putkelle. Signaalit $p_1(n)$ ja $p_2(n)$ ovat putken päistä ulos säteilevät äänipaineet. Putken päiden heijastusfunktio $R_1(z)$ ja $R_2(z)$ ovat samat kuin kuvassa 4.12.

4.4.4 Sivuhaaran kytkettyminen aaltojohtoon

Toisinaan aaltojohtossa esiintyy paikallinen impedanssin muutos. Kyseessä voi olla esimerkiksi avoin tai suljettu sormiaukko puhallinsoittimen rungossa tai sormen kosketus värähtelevään kieleen. Impedanssimuutosta voidaan käsitellä aaltojohtoon sivuhaarana.

Aaltojohtoon kytkeytyvä sivuhaara voidaan esittää kolmiportin avulla. Seuraavassa johdetaan kolmiristeyksen erikoistapauksena tilavuusnopeuden sirontayhtälöt aaltojohtoon, jossa on sivuhaara (kuva 4.14). Tässä tapauksessa kahden haaran akustinen impedanssi on sama.



Kuva 4.14 Homogeeniseen aaltojohtoon (akustinen impedanssi Z_0) liittyy sivuhaara, jonka akustinen impedanssi on Z_s .

Sirontayhtälöt voidaan johtaa massan- ja energiansäilymlakien perusteella. Aaltojohtojen risteyskohdassa äänipaineen täytyy olla jatkuva:

$$p_0 = p_1 = p_2 = \dots = p_N \quad (4.63)$$

Lisäksi analogisesti Kirchhoffin virtalain kanssa tilavuusnopeuksien summan on oltava nolla:

$$\sum_k q_k = 0, \text{ missä } k = 0, 1, 2, 3, \dots, N \quad (4.64)$$

Yhtälöiden (4.63) ja (4.64) sekä (4.1), (4.6), (4.7) ja (4.8) perusteella voidaan kirjoittaa yhtälöryhmä kuvassa 4.14 esitetyille risteykselle:

$$\begin{cases} Z_s(q_s^+ + q_s^-) = Z_0(q_k^+ + q_k^-) \\ Z_s(q_s^+ + q_s^-) = Z_0(q_{k+1}^+ + q_{k+1}^-) \\ q_k^+ + q_k^- = q_{k+1}^+ + q_{k+1}^- \\ q_k^+ - q_k^- + q_{k+1}^- - q_{k+1}^+ + q_s^- - q_s^+ = 0 \end{cases} \quad (4.65)$$

missä Z_0 on aaltojohdon ja Z_s sivuhaaran akustinen impedanssi. Yhtälöryhmän (4.65) kolme ylintä riviä on saatu yhtälön (4.63) perusteella lausumalla eri putkissa vallitsevat paineet aaltojohdon akustisen impedanssin ja tilavuusnopeuksien avulla. Alin rivi on kirjoitettu yhtälön (4.64) mukaisesti.

Yhtälöryhmästä (4.65) voidaan johtaa lausekkeet risteyksestä poispäin virtaaville tilavuusnopeuksille q_k^- , q_{k+1}^+ ja q_s^+ :

$$q_k^- = -\frac{Z_0 q_k^+ - 2Z_s(q_{k+1}^- + q_s^-)}{2Z_s + Z_0} \quad (4.66)$$

$$q_{k+1}^+ = -\frac{Z_0 q_{k+1}^- - 2Z_s(q_k^+ + q_s^-)}{2Z_s + Z_0} \quad (4.67)$$

$$q_s^+ = \frac{2Z_0(q_k^+ + q_{k+1}^-) + (Z_0 - 2Z_s)q_s^-}{2Z_s + Z_0} \quad (4.68)$$

Yhtälöiden (4.66) – (4.68) perusteella voidaan määritellä kolmiportille heijastusfunktio r , joka esittää kuinka suuri osuus aaltojohdossa etenevästä aallosta heijastuu takaisin:

$$r = -\frac{Z_0}{2Z_s + Z_0} \quad (4.69)$$

Yllä olevat yhtälöt (4.66) – (4.68) voidaan nyt kirjoittaa heijastusfunktion (4.69) avulla:

$$q_k^- = r q_k^+ + (r + 1) q_{k+1}^- + (r + 1) q_s^- \quad (4.70)$$

$$q_{k+1}^+ = (r + 1) q_k^+ + r q_{k+1}^- + (r + 1) q_s^- \quad (4.71)$$

$$q_s^+ = -2r q_k^+ - 2r q_{k+1}^- - (2r + 1) q_s^- \quad (4.72)$$

Mallinnettaessa puhallinsoittimen sormiaukkoa voidaan olettaa, että sormiaukosta putkeen suuntautuva tilavuusnopeus q_s^- on hyvin pieni, joten se voidaan jättää huomiotta. Tilavuusnopeus q_s^- voitaisiin ottaa huomioon, mikäli haluttaisiin mallintaa sormiaukoista toisiinsa virtaavaa äänisignaalia (Keefe 1983).

Yhtälöt (4.70) – (4.72) redusoituvat seuraavanlaisiksi:

$$q_k^- = r q_k^+ + (r + 1) q_{k+1}^- \quad (4.73)$$

$$q_{k+1}^+ = (r + 1) q_k^+ + r q_{k+1}^- \quad (4.74)$$

$$q_s^+ = -2r (q_k^+ + q_{k+1}^-) \quad (4.75)$$

Yllä olevista yhtälöistä voidaan erottaa yhteinen tekijä $r(q_k^+ + q_{k+1}^-)$, jolloin yhtälöt voidaan esittää seuraavasti:

$$q_k^- = w + q_{k+1}^- \quad (4.76)$$

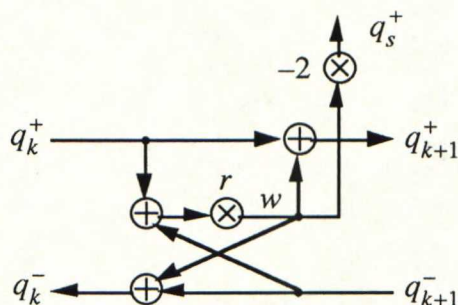
$$q_{k+1}^+ = w + q_k^+ \quad (4.77)$$

$$q_s^+ = -2w \quad (4.78)$$

missä

$$w = r (q_k^+ + q_{k+1}^-) \quad (4.79)$$

Kuvassa 4.15 esitetään edellä johdetun kolmiportin laskenta virtauskaavion avulla.



Kuva 4.15 Aaltojohtoon ja sivuhaaran kytkennän mallintaminen kolmiportin avulla.

Yllä johdettua aaltojohtoon ja sivuhaaran risteystä voidaan käyttää esimerkiksi puupuhaltimen avoimen sormiaukon mallintamiseen, kun mallinnettava suure on tilavuusnopeus. Vastaavasti yhtälöt voidaan esittää myös äänipaineelle. Johto on esitetty viitteessä (Hirschman 1991) ja tulos poikkeaa tilavuusnopeudelle johdetuista yhtälöistä heijastus- ja läpäisykertoimien etumerkkien sekä sivuhaaraan etenevän signaalin kertoimen suhteen.

4.5 Mielivaltaisen pituisen putken mallintaminen

Huilun runko mallinnetaan digitaalisella viivelinjalla, joka koostuu jonosta muistipaikkoja. Linjan pituus voi olla jokin kokonaisluku N_v , jolloin vastaava fyysinen putken pituus saadaan seuraavasti:

$$L = N_v T c \quad (4.80)$$

missä L on pituus metreinä, N_v viivelinjan muodostavien muistipaikkojen lukumäärä, T näyteväli ja $c \approx 350$ m/s äänennopeus putkessa.

Digitaalisen viivelinjan yksi yksikköviive vastaa fyysistä pituutta, joka saadaan tulosta Tc . Mallinnettavan putken pituus voidaan siten valita tulon Tc tarkkuudella. Haluttaessa virittää malli soittamaan esimerkiksi tasavireistä asteikkoa on tarpeen pystyä mallintamaan putken pituus tarkemmin. Huilun runkoa mallinnettaessa pitäisi pystyä jäljittelemään mitä tahansa pituutta noin 10 ja 60 senttimetrin väliltä.

Putken pituus voidaan mallintaa tarkemmin, kun interpoloidaan viivelinjaan talletettujen näytteiden väliltä. Diskreettiä aikaisen signaalin arvo kahden näytteen välillä voidaan teoriassa interpoloida äärettömän pituisten sinc-funktioiden avulla. Käytännössä äärettömän pitkien sekvenssien käsittely on mahdotonta ja siksi käytetäänkin jotakin äärellisen pituista approksimaatiota, kuten Lagrange-interpolointia. Voidaan myös suunnitella rekursiivinen suodin, joka approksimoi ideaalista murtoviivettä. Tällaisia suotimia kutsutaan kokopäästösuotimiksi (engl. allpass filter).

4.5.1 Murtoviipeen approksimointi Lagrange-interpolaattorilla

Lagrange ehdotti, että haluttu tuntematon funktion arvo $f(x)$ ratkaistaisiin tunnettujen arvojen $f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots$, ja $f(x_N)$ avulla seuraavasti (Kreyszig 1988):

- kerrotaan jokainen tunnettu funktion arvo $f(x_k)$ polynomilla $l_k(x)/l_k(x_k)$, jonka arvo on 1 kohdassa x_k ja 0 muiden tunnettujen pisteiden kohdalla ja
- lasketaan yhteen näin saadut $N + 1$ tuloa.

Tuloksena on *Lagrange-polynomi* $L_N(x)$, jolle pätee $L_N(x_k) = f(x_k)$. Muilla argumentin x arvoilla polynomi antaa approksimaation funktion arvolle kyseisessä pisteessä. Lagrangen interpolointimenetelmä voidaan esittää seuraavasti (Kreyszig 1988):

$$f(x) \approx L_N(x) = \sum_{k=0}^N \frac{l_k(x)}{l_k(x_k)} f(x_k) \quad (4.81)$$

Lagrangen yhtälö on *lineaarisen interpoloinnin laajennus*, sillä kun $N = 1$ eli interpolointi perustuu ainoastaan kahteen tunnettuun arvoon, on menetelmä identtinen lineaarisen interpoloinnin kanssa.

Lagrange-interpolaattori voidaan tulkita *FIR-suotimeksi*, jonka siirtofunktio on:

$$H(z) = \sum_{n=0}^N h(n) z^{-n} \quad (4.82)$$

missä N on suotimen asteluku. Suodinkertoimet $h(n)$ voidaan määrittää seuraavasti (Laine 1988):

$$h(n) = \prod_{j=0, j \neq n}^N \frac{D-j}{n-j} \quad (4.83)$$

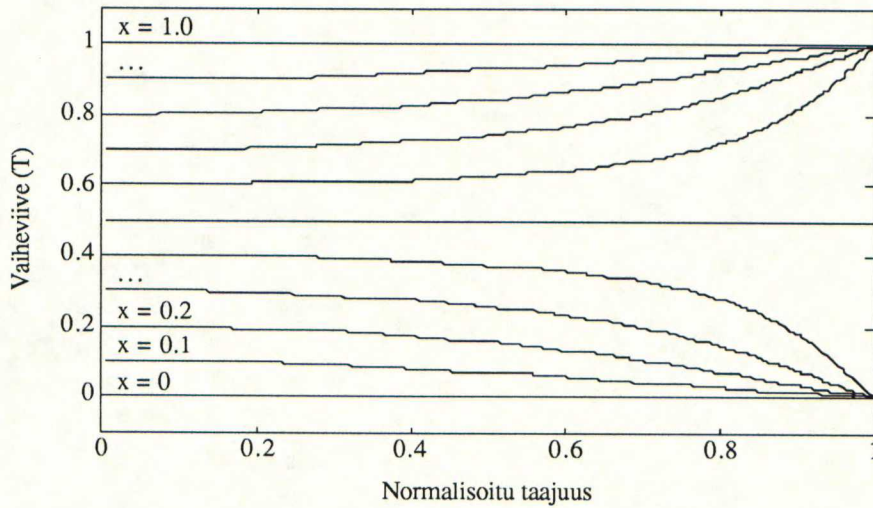
missä D on haluttu kokonaisviive, joka saadaan seuraavasti (Laakso *et al.* 1992):

$$D = \begin{cases} x + N/2 & , \text{ kun } N \text{ on parillinen} \\ x + (N-1)/2 & , \text{ kun } N \text{ on pariton} \end{cases} \quad (4.84)$$

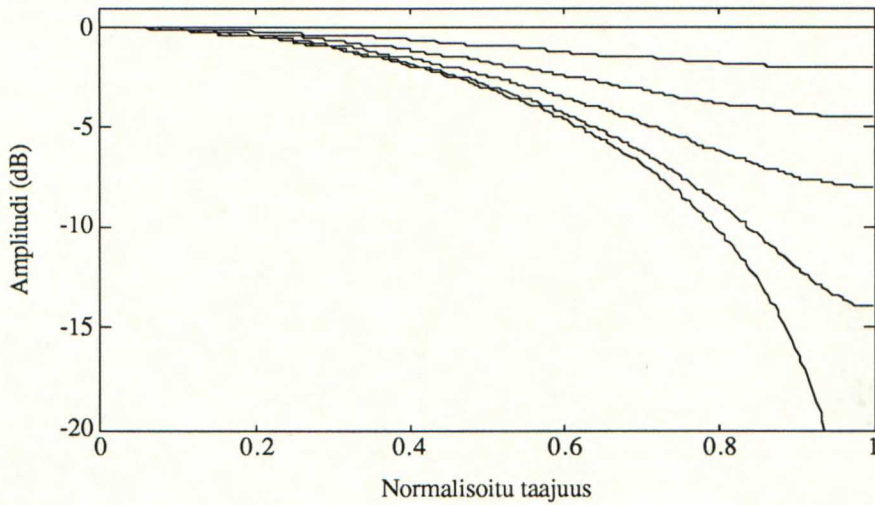
missä x on *murtoviive*, joka kannattaa valita siten, että $0 \leq x \leq 1$ kun N on parillinen ja $-0,5 \leq x \leq 0,5$ kun N on pariton (Laakso 1990). Kun D valitaan yhtälön (4.84) mukaisesti, on suotimen impulssivasteen suurin arvo mahdollisimman keskellä ja approksimaatiovirhe muodostuu pienemmäksi kuin muissa tapauksissa.

Lagrange-interpolaattorin amplitudivaste ja vaiheviive vastaavat ideaalista murtoviivettä erittäin hyvin pienillä taajuuksilla, mutta suurilla varsin kehnosti. Parillisen pituisella eli parittoman asteluvun FIR-suotimen erityisominaisuutena on, että murtoviiveen arvolla $x = 0,5$ impulssivaste on symmetrinen ja suodin on lineaarivaiheinen (Laakso 1990). Tällöin vaiheviive on vakio kaikilla taajuuksilla. Valitettavasti amplitudivaste puolestaan vaimenee tässä tapauksessa jyrkemmin taajuuden funktiona kuin muulloin, sillä kun asteluku on parillinen ja impulssivaste symmetrinen, on suotimella nolla Nyquist-taajuudella.

Kuvassa 4.16 nähdään lineaarisen interpolaattorin ($N = 1$) vaiheviive eri murtoviiveen arvoilla. Pienillä taajuuksilla approksimaatiovirhe häviää, mutta suurilla virhe on pieni vain kun x on vähän pienempi kuin 1, vähän suurempi kuin 0 tai $x = 0,5$. Kuvassa 4.17 esitetään lineaarisen interpolaattorin amplitudivaste eri x :n arvoilla. Kuvaajista voidaan havaita interpolaattorin olevan alipäästötyyppinen suodin. Suurilla taajuuksilla jyrkimmin laskeva kuvaaja vastaa murtoviivettä $x = 0,5$.

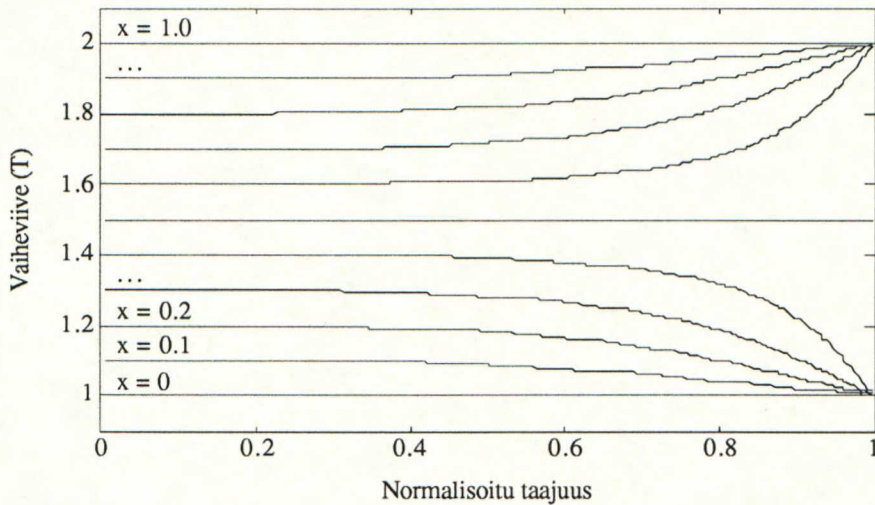


Kuva 4.16 Ensimmäisen asteen ($N = 1$) eli lineaarisen Lagrange-interpolaattorin vaiheviive murtoviiveen arvoilla $x \in [0, 1, 0]$.

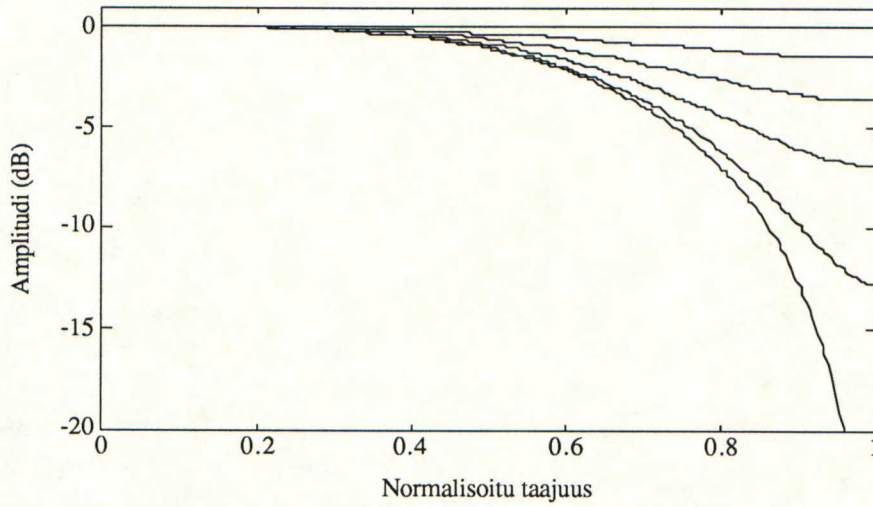


Kuva 4.17 Ensimmäisen asteen ($N = 1$) Lagrange-interpolaattorin amplitudivaste murtoviipeen arvoilla (ylhäältä lukien) $x = 0$, $x = 0,1$, $x = 0,2$, $x = 0,3$, $x = 0,4$ ja $x = 0,5$. Samat kuvaajat saadaan myös arvoilla $x = 1,0$, $x = 0,9$, $x = 0,8$, $x = 0,7$ ja $x = 0,6$.

Kolmannen asteen Lagrange-interpolaattorin vaiheviive (ks. kuva 4.18) approksimoi viipeen nimellistä arvoa x tarkemmin hieman suuremmille taajuuksille saakka kuin ensimmäisen asteen interpolaattori. Amplitudivasteessa kuvassa 4.19 esiintyy arvolla $x = 0,5$ parittoman asteluvun lineaarivaiheiselle FIR-suotimelle tyypillinen ongelma: vaste laskee jyrkästi taajuuden funktiona.

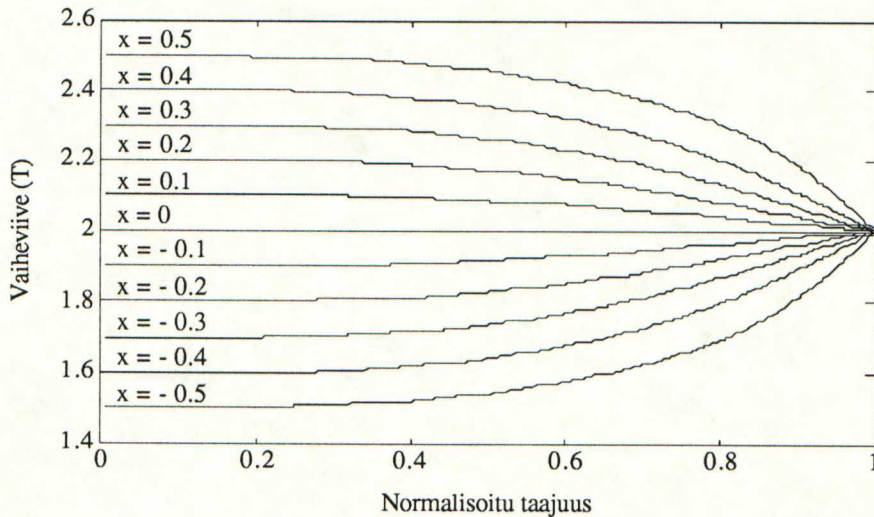


Kuva 4.18 Kolmannen asteen ($N = 3$) Lagrange-interpolaattorin vaiheviive murtoviipeen arvoilla $x \in [0, 1, 0]$.

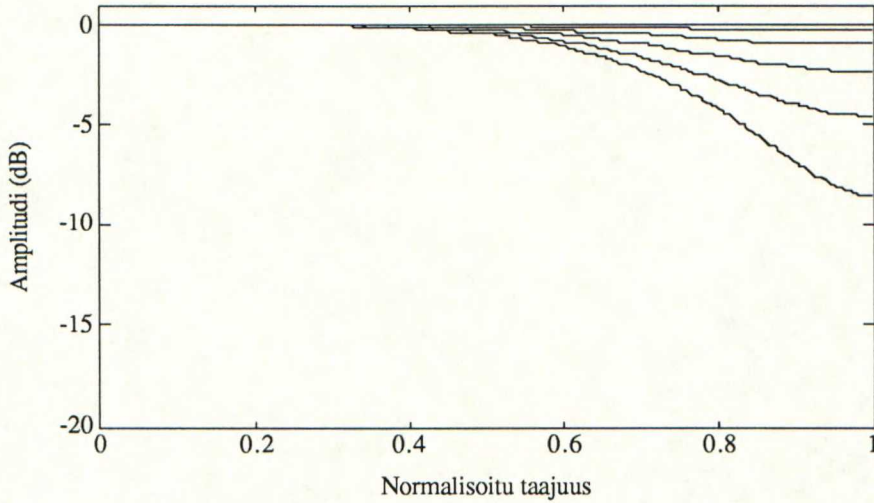


Kuva 4.19 Kolmannen asteen ($N = 3$) Lagrange-interpolaattorin amplitudivaste murtoviipeen arvoilla $x = 0, x = 0,1, x = 0,2, x = 0,3, x = 0,4$ ja $x = 0,5$.

Parillisen asteluvun Lagrange-interpolaattorissa ei esiinny koskaan nollaa Nyqvist-taajuudella, joten amplitudivaste ei vaimene suurilla taajuuksilla kovin voimakkaasti. Kuvassa 4.20 esitetään neljännen asteen interpolaattorin vaiheviive taajuuden funktiona ja kuvassa 4.21 saman suotimen amplitudivaste eri murtoviipeen arvoilla. Vaiheviive on edellä esitettyjä matala-asteisia approksimaatioita tasaisempi pienillä taajuuksilla. Amplitudivaste on huomattavasti tasaisempi kuin parittoman asteluvun interpolaattoreissa. Silti amplitudivaste laskee jonkin verran suurilla taajuuksilla.



Kuva 4.20 Neljännen asteen ($N = 4$) Lagrange-interpolaattorin vaiheviive murtoviipeen arvoilla $x \in [-0,5, 0,5]$.



Kuva 4.21 Neljännen asteen ($N = 4$) Lagrange-interpolaattorin amplitudivaste murtoviipeen arvoilla $x = 0, x = 0,1, x = 0,2, x = 0,3, x = 0,4$ ja $x = 0,5$.

Lagrange-interpoloinnilla on useita hyviä puolia, joista mainittakoon suotimen vai-
vaton suunnittelu yhtälön (4.83) mukaisesti sekä tasainen taajuusvaste ja vaiheviive
pienillä taajuuksilla (Laakso *et al.* 1992). Lagrange-interpolaattorin amplitudivasteelle
päte $|H(z)| \leq 1$, joten sitä voi huoletta käyttää takaisinkytketyissä järjestelmissä. Tämä
on erityisesti aaltojohtomallinnusta ajatellen hyödyllinen ominaisuus. Heikkoutena voi-
daan pitää Lagrange-interpolaattorin alipäästöluonnetta, mistä johtuen se antaa hyviä tu-
loksia ainoastaan pienillä taajuuksilla ja vaatii siksi sovelluksilta suurta näytetaajuutta.
Toinen vaihtoehto on käyttää korkea-asteista parillisen asteluvun interpolaattoria, jol-
loin saavutetaan kohtuullinen suorituskyky myös suurilla taajuuksilla.

Lagrange-interpolaattori on tavallinen FIR-suodin, joten interpolointi merkitsee tässä
tapauksessa signaalin konvoluutiota interpolaattorin kerroinvektorin kanssa. N -asteisen
interpolaattorin laskenta vaatii siten $N + 1$ kerto- ja N yhteenlaskua näytevälissä T .
Muistia FIR-suodin varaa yhteensä $2N + 1$ muistipaikkaa, joista kertoimien säilyttämi-
seen tarvitaan $N + 1$ kappaletta ja N viivelinjaa. Lagrange-interpolaattorin kertoimien
päivitystä on käsitelty liitteessä A.1.

4.5.2 Murtoviipeen approksimointi kokopäästösuotimella

Kokopäästösuotimen (engl. allpass filter) siirtofunktio on seuraavanlainen:

$$H(z) = \frac{a_N + a_{N-1} z^{-1} + \dots + a_1 z^{-(N-1)} + z^{-N}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}} = \frac{z^{-N} A(z^{-1})}{A(z)} \quad (4.85)$$

missä N on suotimen asteluku ja $A(z)$ nimittäjäpolynomi. Osoittajapolynomin kertoimet
ovat samat kuin nimittäjän, mutta käänteisessä järjestyksessä. Kokopäästösuodin¹ on
saanut nimensä siitä, että sen amplitudivaste on tasainen koko taajuuskaistalla. Ominai-

¹ vrt. alipäästö- ja ylipäästösuodin

suus on helppo osoittaa, kun merkitään $z^{-1} = e^{-j\omega}$:

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{|e^{-jN\omega} A(e^{-j\omega})|}{|A(e^{j\omega})|} = 1 \quad (4.86)$$

sillä $|e^{-jN\omega}| = 1$ ja $|A(e^{-j\omega})| = |A(e^{j\omega})|$.

Kokopäästösuotimen kiinnostava ominaisuus on sen vaihevaste. Tässä tapauksessa ollaan erityisesti kiinnostettu approksimoimaan taajuudesta riippumatonta vakioviivettä kokopäästösuotimien avulla.

Suotimen aiheuttamaa viivettä voidaan tarkastella taajuuden funktiona määrittämällä joko vaiheviive (engl. phase delay) tai ryhmäviive (engl. group delay). *Vaiheviive* τ_p kuvaa kaistarajoitetun signaalin kantoaallon viivästymistä ja se on määritelty seuraavasti (ks. esim. Parks ja Burrus 1987):

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} \quad (4.87)$$

Ryhmäviive τ_g puolestaan kertoo kaistarajoitetun signaalin verhoikäyrän viivästymisestä ja sen määritelmä on (Parks ja Burrus 1987):

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} \quad (4.88)$$

Lineaarivaiheisen suotimen vaihe- ja ryhmäviive ovat samansuuruiset vakiot. Jos suotimen vaihevaste on epälineaarinen, poikkeavat vaihe- ja ryhmäviive toisistaan. Huomautettakoon, että suotimen ryhmäviive voi olla joillakin taajuuksilla negatiivinen. Vaiheviive sen sijaan on aina kaikilla taajuuksilla positiivinen luku.

Yleisesti sanoen kokopäästösuotimen ryhmäviive on seuraavanlainen (Laakso 1990):

$$\tau_g(\omega) = N + 2\tau_A(\omega) \quad (4.89)$$

missä τ_A on nimittäjäpolynomin muodostaman rekursiivisen suotimen ryhmäviive. Kokopäästösuotimen ryhmäviive koostuu siten asteluvun N suuruisesta kokonaisuudesta ja rekursiivisen osan aiheuttamaan ryhmäviipeeseen nähden kaksinkertaisesta osasta.

Timo Laakso (1990) on näyttänyt, että haluttua murtoviivettä approksimoivan kokopäästösuotimen kertoimet voidaan laskea seuraavasta yhtälöstä (Thiran 1971):

$$a_k = (-1)^k \binom{N}{k} \prod_{n=0}^N \frac{x+n}{x+k+n} \quad (4.90)$$

missä x on murtoviive, N suotimen asteluku ja $k = 1, 2, 3, \dots, N$. Näin saatava suodin on automaattisesti skaalattu siten, että amplitudivaste on identtisesti yksi, sillä $a_0 = 1$ aina.

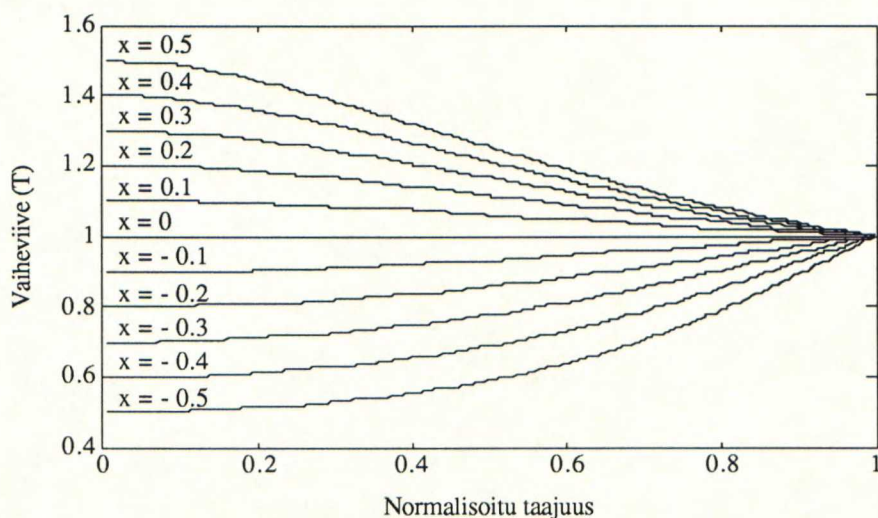
Esimerkkinä voidaan laskea 1. ja 2. asteen kokopäästösuotimien kertoimet. Ensimmäisen asteen kokopäästösuotimen siirtofunktio on:

$$H(z) = \frac{a + z^{-1}}{1 + az^{-1}} \quad (4.91)$$

Suotimen ainoa kerroin a saadaan yhtälöstä (4.90) sijoittamalla $N = 1$ ja $k = 1$:

$$a = -\frac{x}{x+2} \quad (4.92)$$

missä x on murtoviive. Kuvassa 4.22 esitetään ensimmäisen asteen kokopäästösuotimen vaiheviive taajuuden funktiona murtoviipeen x eri arvoilla.

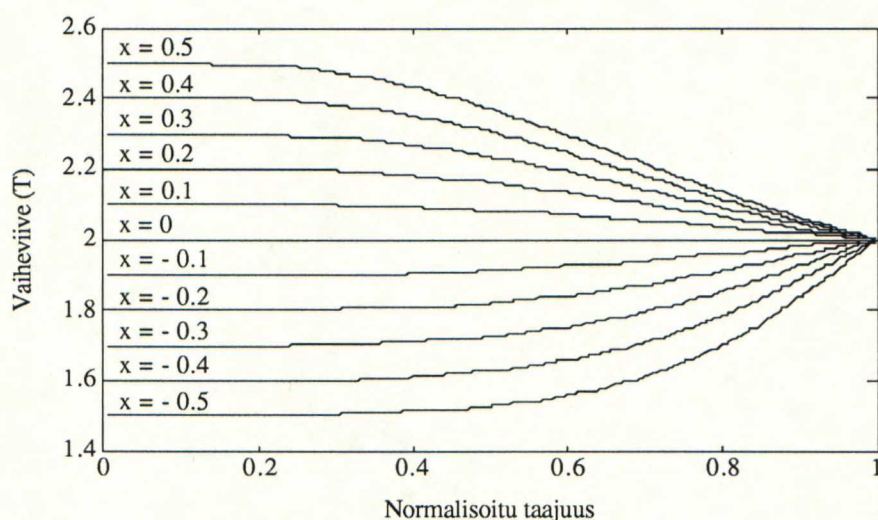


Kuva 4.22 Murtoviipeen approksimaatio ensimmäisen asteen kokopäästösuotimella. Kuvassa esitetään suotimen vaiheviive murtoviipeen arvoilla $x \in [-0,5, 0,5]$.

Toisen asteen kokopäästösuotimen kertoimet ovat yhtälön (4.90) perusteella:

$$a_1 = -\frac{2x}{x+3} \quad \text{ja} \quad a_2 = \frac{x(x+1)}{(x+3)(x+4)} \quad (4.93)$$

Suotimen vaiheviipeen kuvaaja eri x :n arvoilla esitetään kuvassa 4.23.



Kuva 4.23 Murtoviipeen approksimaatio toisen asteen kokopäästösuotimella. Kuvassa esitetään suotimen vaiheviive murtoviipeen arvoilla $x \in [-0,5, 0,5]$.

Murtoviipeen arvolla $x = 0$ suodinkertoimet menevät nolaksi ja kokopäästösuodin muuttuu triviaaliksi viivelinjaksi, jossa on suotimen asteluvun osoittama määrä yksiköviipeitä. On huomattavaa, että muilla x :n arvoilla kokopäästösuotimien vaiheviive ei ole vakio koko taajuuskaistalla, vaan se on lähellä nimellistä arvoaan pienillä taajuuksilla ja poikkeama nimellisarvosta kasvaa taajuuden kasvaessa. Kun suotimen astelukua kasvatetaan, pysyy vaiheviive lähempänä nimellistä arvoaan yhä suuremmalle taajuudelle. Valitettavasti suorituskyvyn paraneminen hidastuu asteluvun kasvaessa, ja siksi merkittävän parannuksen saaminen saattaa vaatia erittäin korkea-asteista suodinta.

Tavallisen IIR-suotimen toteutuksessa kertolaskuja kertyy $2N + 1$ ja summauksia $2N$, kun suotimen asteluku on N . Kokopäästösuotimen identtiset takaisinkytkentä- ja myötäkytkentähaaran kertoimet helpottavat laskentaa, sillä kokopäästösuotimen differenssiyhtälö eli siirtofunktion (4.85) käänteinen z -muunnos voidaan lausua seuraavasti:

$$\begin{aligned} y(n) &= x(n - N) + \sum_{k=1}^N a_k [x(n - N + k) - y(n - k)] \\ &= x(n - N) + a_1 [x(n - N + 1) - y(n - 1)] + a_2 [x(n - N + 2) - y(n - 2)] + \\ &\quad \dots + a_{N-1} [x(n - 1) - y(n - N + 1)] + a_N [x(n) - y(n - N)] \end{aligned} \quad (4.94)$$

Tällöin kertolaskuja tarvitaan ainoastaan N ja yhteenlaskuja edelleen $2N$, kuten yleisessä IIR-suotimen tapauksessa.

Kokopäästösuotimen tehokkaassa toteutuksessa tarvitaan kaksi viivelinjaa, sillä yhtälön (4.94) mukainen suodinrakenne on suora muoto I. Kumpikin viivelinja varaa N muistipaikkaa. Kertoimia on yhtälön (4.94) mukaan N kappaletta, sillä $a_0 = 1$ aina. Kokopäästösuotimen muistintarve on yhteensä $3N$ muistipaikkaa. Kokopäästösuotimen kertoimien päivitystä käsitellään liitteessä A.2.

4.5.3 Lagrange-interpolaattorin ja kokopäästösuotimen vertailu

Lagrange-interpolaattori ja kokopäästösuodin ovat luonteeltaan täysin erilaiset: ensimmäinen on FIR-tyyppinen ja toinen puolestaan IIR-tyyppinen suodin. Lisäksi Lagrange-interpolaattori on alipäästösuodin kun taas kokopäästösuotimen amplitudivaste on nimensä mukaisesti tasainen kaikilla taajuuksilla. Vertailun tekee mielenkiintoiseksi se seikka, että periaatteessa kumpikin lähestymistapa kelpaa aaltojohtomalliin liitettäväksi murtoviipeen approksimaatiomenetelmäksi, kun asteluku on riittävä (käytännössä 2 - 5). Siksi on vertailtava menetelmien toteutuksen aiheuttamaa laskentataakkaa ja lisäksi kokeiltava kuinka menetelmät soveltuvat dynaamisesti muuttuvan viipeen mallintamiseen.

Vertailun helpottamiseksi taulukkoon 4.1 on kerätty kummankin suotimen laskutoimitusten määrät sekä muistin tarve. Kertoimien päivitys on kokopäästösuotimessa selvästi raskaampaa kun Lagrange-interpolaattorissa, sillä kerto- ja yhteenlaskuja tarvitaan pahimmassa tapauksessa $2N - 2$ kappaletta enemmän ja lisäksi on suoritettava yksi ja

kolasku (ks. liite A.2), jota on nykyisissä signaaliprosessoreissa approksimoitava vähintään noin 20 käskyn pituisella aliohjelmalla.

Interpoloinnin aikana N -asteisessa kokopäästösuoitimesta joudutaan suorittamaan Lagrange-interpolaattoriin nähden N yhteenlaskua enemmän. Tuloja kokopäästösuoitimessa sen sijaan tarvitaan yksi vähemmän. Yhteensä kokopäästösuoitimessa tarvitaan $N - 1$ laskutoimitusta enemmän.

Muistia kokopäästösuoitin kuluttaa $N - 1$ muistipaikkaa enemmän. Kertoimia N -asteisella kokopäästösuoitimella on 1 vähemmän kuin samanasteisella Lagrange-interpolaattorilla, koska kerroin $a_0 = 1$ aina eikä siihen liittyvää kertolaskua siten tarvitse suorittaa lainkaan. Kokopäästösuoitimen muistintarve on kuitenkin suurempi, koska laskennallisesti tehokkaassa suora muoto I -toteutuksessa tarvitaan kaksi viivelinjaa.

Vertailussa on otettava huomioon, että ensimmäisen tai toisen asteen kokopäästösuoitimen vaiheviive approksimoi vakioviivettä yleensä riittävän hyvin. Jos taas käytetään Lagrange-interpolointia, on suoitimen asteluvuksi valittava vähintään 3, jotta amplitudivasteen virhe olisi riittävän pieni. Kun käytännössä riittävä asteluku huomioidaan, voidaan todeta kokopäästösuoitimen ja Lagrange-interpolaattorin olevan likimain yhtä tehokkaita murtoviiveen approksimointiin soveltuvia menetelmiä. Mikäli laskennan tehokkuus on tärkein kriteeri approksimointimenetelmän valinnassa, kannattanee käyttää ensimmäisen asteen kokopäästösuoitinta.

Taulukko 4.1 *Lagrange-interpolaattorin ja kokopäästösuoitimen vertailu.*

	Lagrange-interpolaattori (FIR)	Kokopäästösuoitin (IIR)
Kertoimien päivitys:		
Kertolaskuja ²	$< N^2 + N$	$N^2 + 2N - 1$
Yhteenlaskuja	N	$2N - 1$
Jakolaskuja	–	1
Yhteensä	$< N^2 + 2N$	$N^2 + 4N - 2 + \text{jakolasku}$
Suodatus:		
Kertolaskuja	$N + 1$	N
Yhteenlaskuja	N	$2N$
Yhteensä	$2N + 1$	$3N$
Muistin tarve:		
Kertoimet	$N + 1$	N
Viivelinja(t)	N	$2N$
Yhteensä	$2N + 1$	$3N$

² Lagrange-interpolaattorin kertoimien päivityksessä voidaan käyttää hyväksi osittelua ja välitulosten talletusta, jolloin selvittäänsä selvästi pienemmällä määrällä kertolaskuja kuin $N^2 + N$ (ks. Liite A).

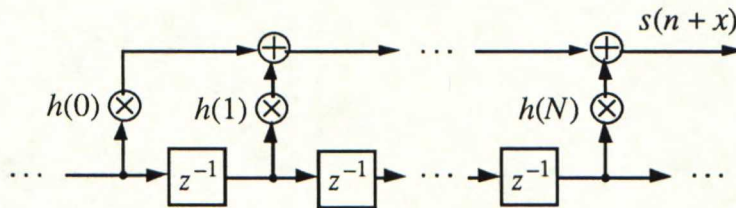
Kun aaltojohtomallissa halutaan muuttaa viivelinjan pituutta nopeasti – esimerkiksi glissandon yhteydessä – on parasta valita Lagrange-interpolaattori murtoviipeen approksimointiin. Lagrange-interpolaattori on FIR-suodin eikä sillä ole tilamuuttujia, ja siksi siinä ei esiinny transienttia murtoviipeen arvon muuttuessa. Kokopäästösuodin puolestaan on rekursiivinen suodin, jonka ulostuloon vaikuttavat tulon lisäksi tilamuuttujat. Murtoviipeen arvon muuttuessa vaihtuu suotimen tulo, mutta tilamuuttujissa on edelleen vanhoja näytteitä. Tämän oletetaan aiheuttavan kuultavia häiriöitä kokopäästösuotimen ulostulossa.

4.5.4 Lagrange-interpolaattoriin perustuva murtoviivesuodin

Joissain tapauksissa aaltojohdossa etenevän signaalin arvo haluttaisiin tietää näytepisteiden välillä. Teoriassa tällöin voidaan approksimoida signaalin arvo interpoloimalla sinc-funktion avulla. Koska sinc-funktio on äärettömän pitkä, on välttämätöntä käyttää äärellisen pituista approksimaatiota.

Erityisen sopivalta murtoviipeen approksimointimenetelmältä vaikuttaa Lagrange-interpolointi, joka on sinc-interpoloinnin laakalatvainen approksimaatio (Laakso *et al.* 1992). Lagrange-interpolointi soveltuu hyvin viivelinjan ulostulon interpolointiin, sillä FIR-tyyppisen interpolaattorin tilamuuttujat sisältyvät tällöin viivelinjaan eikä laskennan muita tuloksia tarvitse tallettaa. Kuvassa 4.24 esitetään ulostulon laskeminen mielivaltaisesta pisteestä näytepisteiden väliltä FIR-tyyppisen interpolaattorin avulla.

Vastaavasti voidaan interpolaattorin avulla määritellä aaltojohdolle syöttöpiste mielivaltaiseen kohtaan näytepisteiden välille. Tähän menettelyyn liittyy teoreettinen ongelma: järjestelmä ei ole *kausaalinen*, jos interpolointifunktio on äärettömän pitkä sinc-funktio. Syynä on se, että tällöin aaltojohtoon syötettävä signaali vaikuttaa välittömästi kaikkiin viivelinjan pisteisiin. Syöttöpisteen ohi kulkeneet näytteet päivitetään silloin jälkikäteen, mutta syöttöpistettä kohti etenevät näytteet päivitetään jo *ennen kuin ne saapuvat tulon kohdalle*. Ongelma on nimenomaan teoreettinen, sillä käytännössä interpolaattori vaikuttaa ainoastaan muutamiin käsiteltävän pisteen ympärillä oleviin näytteisiin.

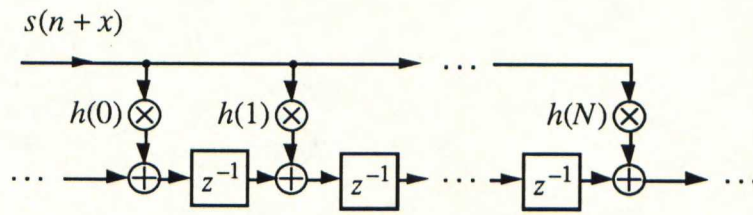


Kuva 4.24 Ulostulo mielivaltaisesta pisteestä $n + x$ viivelinjan näytepisteiden välillä.

Kuvassa 4.25 esitetään *käänteinen FIR-interpolointi*³, jossa hajautetaan aaltojohtoon syötettävä signaalinäyte useisiin syöttöpisteen lähellä oleviin näytepisteisiin. Käänteisessä interpoloinnissa käytettävät painokertoimet ovat samat kuin tavallisessa

³ Huomautettakoon, että käänteinen interpolointi tarkoittaa perinteisesti funktion argumentin x ratkaisemista, kun arvo $f(x)$ tiedetään.

Lagrange-interpoloinnissa.



Kuva 4.25 Syöttöpiste kohdassa $n+x$ viivelinjan näytepisteiden välillä.

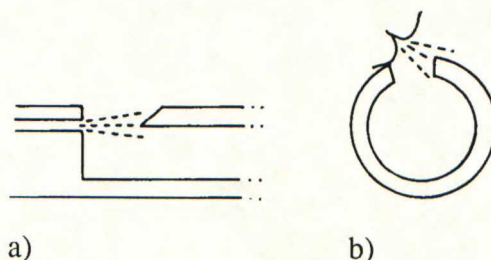
Yllä esitetyt suodinsrakenteet soveltuvat käytettäviksi esimerkiksi huilun tai muun puhallinsoittimen sormiaukkojen mallintamisessa: sormiaukkoa mallintava kolmiportti ja murtoviivesuodin voidaan yhdistää, jolloin sormiaukon sijainti voidaan määritellä täsmällisesti.

5 HUILUN RAKENNE JA TOIMINTA

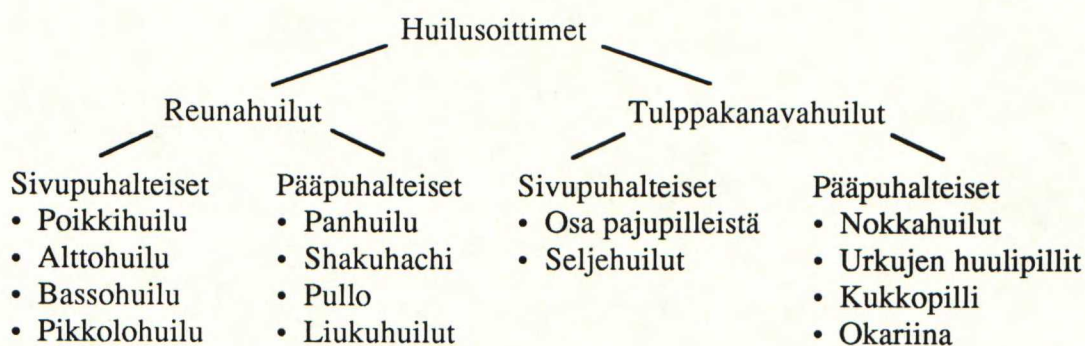
5.1 Huilusoittimet

Poikkihuilu kuuluu *huilusoittimien* laajaan luokkaan. Huilusoittimissa ei ole värähtelevää mekaanista osaa, kuten lehdykkää, eikä heräte eli soittajan puhaltama ilmasuihku myöskään sisällä mitään jaksollista komponenttia. Huilusoittimien toiminta perustuu värähtelevään ilmasuihkuun, joka jakautuu törmätessään resonaattorissa olevaan sär-mään. Resonaattorin tila pakottaa ilmasuihkun poikittaiseen värähtelyliikkeeseen. Täl-löin suihku syöttää resonaattoriin tehoa resonanssitaajuudella ja oskillaatio pitää itseään yllä.

Huilusoittimet jaetaan puhallusaukon rakenteen mukaan tulppakanavahuiluihin ja reunahuiluihin. *Tulppakanavahuiluissa* ilmasuihku ohjataan kuvan 5.1a mukaisesti il-makanavan avulla suuaukon reunaan. Poikkihuilu kuuluu *reunahuiluihin*, joissa soitta-jan huulet ohjaavat ilmasuihkun kohti puhallusaukon takasärmää (kuva 5.1b). Poikki-huilussa ja sen muunnelmassa – pikkolo-, altto- ja bassohuilussa – soitinta puhalletaan sivulta. Esimerkiksi panhuilussa ja japanilaisessa bambupillissä, shakuhachissa, soitti-men putken pää on avoin ja ilmasuihku suunnataan pään reunaan. Kuvassa 5.2 esitetään huilusoittimien luokittelu puhallusaukon rakenteen ja soittotavan mukaan (Otavan iso musiikkitietosanakirja 1978).



Kuva 5.1 a) Tulppakanavahuiluissa, kuten nokkahuilussa, ilmasuihku ohjataan ilma-kanavaa pitkin suuaukon takasärmään. b) Poikkihuilussa ja muissa reunahuiluissa soittaja suuntaa puhaltamansa ilmasuihkun huulillaan suuaukon terävään reunaan (Fletcher ja Rossing 1991).



Kuva 5.2 Erilaisia huilusoittimia ryhmiteltynä puhallusaukon rakenteen ja soittotavan mukaan (Otavan iso musiikkitietosanakirja 1978).

Poikkihuilun, nokkahuilun ja uruissa käytettävien huulipillien resonaattori on kapea avoin putki, joka toimii *puoliaaltoresonaattorina*. Tällaisella putkella on täydellinen harmonisten sarja. Esimerkiksi panhuilussa resonaattoriputki on suljettu. Toisesta päästään suljettu putki on *neljännesaaltoresonaattori*, jolla on vain parittomat harmoniset. Osa huilusoittimista on *astiahuiluja*, joissa resonaattori on tyypillisesti pyöreämuotoinen onkalo. Esimerkkeinä mainittakoon okariina, kukkopilli, pullo sekä tavallinen vihellys. Myös *Helmholtz-resonaattori*, jolla on vain yksi resonanssitaajuus, kuuluu astiahuiluihin.

Huilusoittimia syötetään ilmasuihkulla, joten resonaattori saa eniten energiaa kun tilavuusnopeus soittimen suuaukolla on suurimmillaan. Tämä toteutuu, kun resonaattorin suulta näkyvä akustinen admittanssi on maksimissaan eli kun impedanssi on minimissään. Kyseessä on merkittävä ero verrattuna ruoko- ja vaskipuhaltimiin, sillä niissä resonaattori toimii parhaiten impedanssin maksimikohdissa.

5.2 Nykyaikainen poikkihuilu

Poikkihuilu kehittyi nykyiseen muotoonsa 1800-luvun puolivälissä, jolloin Theobald Böhm suunnitteli huilun alusta lähtien uudestaan. Nykyaikaista poikkihuilua nimitetäänkin usein *Böhmin huiluksi* (kuva 5.3). Modernin huilun pyöreän rungon halkaisija on 19 millimetriä. Suokappale on liitoskohdastaan saman paksuinen, mutta kapenee hiukan huuliaukkoa kohti, missä halkaisija on tyypillisesti noin 17 mm. Huilun rungossa on 13 suurehkoa sekä 3 pientä sormiaukkoa, joiden avulla resonaattoriputken pituutta voidaan muuttaa.



Kuva 5.3 Nykyaikainen poikkihuilu eli Böhmin huilu.

5.2.1 Valmistusmateriaalit

Ennen vuotta 1930 huilun runko rakennettiin yleensä puusta ja ainoastaan läppäkoneisto metallista. Rungon valmistukseen kokeiltiin 1700-luvulla myös lasia, norsunluuta ja porsliinia. Nykyiset huilut rakennetaan yleensä metallista. Edulliset oppilashuilut valmistetaan metalliseoksesta, joka sisältää kuparia, nikkeliä ja sinkkiä. Joskus suukappale tai koko runko hopeoidaan. Kalleimmat huilut rakennetaan hopeasta, platinasta tai jopa 14 karaatin kullasta.

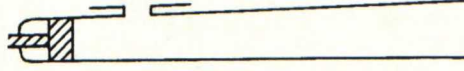
Nykyään tiedetään, että materiaalin ominaisuuksilla ei ole havaittavaa vaikutusta soittimen äänensävyyn, vaikka niin on kautta aikojen kuviteltu. Coltman (1971) selvitti nokkelan kuuntelukokeen avulla, etteivät kokeneetkaan kuulijat pysty erottamaan hopeasta, kuparista ja puusta tehtyjä eripaksuisia huiluja toisistaan. Lisäksi hän osoitti, etteivät ammattisoittajat kykene huomaamaan eroa soittaessaan edellä mainittuja soittimia. Valmistusmateriaali ei siten vaikuta huilun soitettavuuteen (Coltman 1971). Ainoa merkittävä ero eri materiaaleista tehtyjen huilujen välillä oli niiden vireen muuttuminen rungon lämpenemisen yhteydessä: raskaan kupariputken lämpeneminen kesti huomattavasti kauemmin kuin vertailukohteiden, joten siitä tehdyn soittimen viritys nousi vastaavasti hitaammin (Coltman 1971).

Materiaali ei vaikuta huilun äänen ominaisuuksiin, koska rungon seinämät ovat liian jäykät värähdelläkseen voimakkaasti ilmapatsaan mukana. Fletcher ja Rossing (1991) toteavat seinämien tuottaman äänen olevan noin 50 dB heikomman kuin ilmasuihkun ääni. Tosin seinämien ylemmät moodit heräävät rungon sivulta puhalletun ilmasuihkun vaikutuksesta, mutta säteilevät hyvin heikosti. Periaatteessa rungon seinämän paksuuden muuttaminen vaikuttaisi huilun ääneen enemmän kuin materiaalin muuttaminen (Fletcher ja Rossing 1991).

Arvokkailla metalleilla on kiistämättä hyviä ominaisuuksia, joiden ansiosta niitä kannattaa käyttää huilun rakennusaineena. Niitä on helppo työstää tarkasti ja ne ovat kestäviä ja kauniita materiaaleja (Fletcher ja Rossing 1991). Taitavimmat ja arvostetuimmat soitinrakentajat valitsevatkin materiaalikseen useimmiten kullan tai hopean ja taidokkaan työn tuloksena syntyneet huilut soivat poikkeuksetta hyvin. Siksi monet luulevat onnistuneen tuloksen johtuvan materiaalin akustisista ominaisuuksista. Väärinkäsitystä on siten vaikea korjata.

5.2.2 Suukappale

Huilun viritukseen vaikuttavat eniten puhallusaukon ja huilun suljetun pään välillä oleva ontelo sekä suukappaleen ja puhallusaukon muotoilu (Fletcher ja Rossing 1991). Suukappaleen suljetussa päässä on kuvan 5.4 mukaisesti korkki, jonka asemaa voidaan muuttaa. Korkin asema määrää poikkihuilun ensimmäisen ja toisen oktaavin välisen virituksen. Jos korkkia siirretään runsaasti optimaaliselta paikaltaan, menevät oktaavit jopa puoli sävelaskelta epävireeseen.



Kuva 5.4 Kaavamainen kuva huilun suukappaleesta. Suukappale supistuu kohti suuaukkoa. Suukappaleen päässä näkyy korkki, jonka asema vaikuttaa viritykseen.

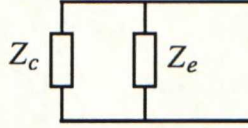
Suukappale voidaan esittää sijaiskytkentänä, jossa puhallusaukon ja ontelon impedanssit on kytketty rinnan (kuva 5.5). Puhallusaukon akustinen impedanssi Z_e voidaan olettaa inertanssin M aiheuttamaksi (Fletcher ja Rossing 1991):

$$Z_e = j\omega M = j\omega \frac{\rho l_e}{A_e} \quad (5.1)$$

missä l_e on suuaukon efektiivinen pituus ja A_e sen pinta-ala. Ontelon impedanssin Z_c puolestaan aiheuttaa komplianssi C (Fletcher ja Rossing 1991):

$$Z_c = \frac{1}{j\omega C} = \frac{\rho c^2}{j\omega V} \quad (5.2)$$

missä V on ontelon tilavuus.

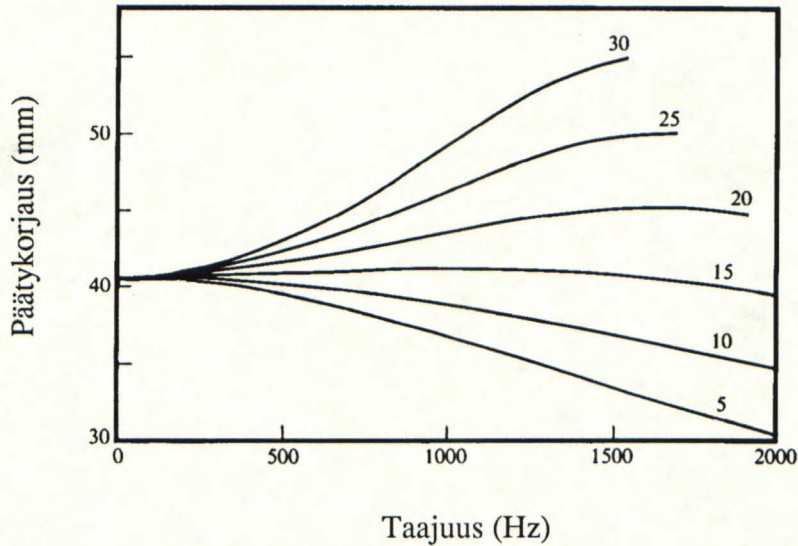


Kuva 5.5 Suukappaleen sijaiskytkentä, joka koostuu suljetussa päässä olevan ontelon impedanssin Z_c ja puhallusaukon impedanssin Z_e rinnankytkennästä.

Ontelon ja suuaukon impedanssien rinnankytkennästä voidaan johtaa ontelon edustama akustinen pituus, jota kutsutaan päätykorjaukseksi ΔL (Fletcher ja Rossing 1991):

$$\Delta L = \frac{c}{\omega} \arctan \left[\frac{M \omega}{Z_0 (1 - M C \omega^2)} \right] \quad (5.3)$$

missä Z_0 on huilun rungon akustinen impedanssi. M ja C ovat edellä esitetyt puhallusaukon inertanssi ja ontelon komplianssi. Päätykorjaus ΔL on kuvan 5.6 mukaisesti kulmataajuuden ω ja ontelon tilavuuden V funktio. Kun korkin etäisyys suuaukon keskipisteestä säädetään 17 millimetriksi, on päätykorjaus eli ontelon edustama akustinen pituus 42 mm pienillä taajuuksilla noin 2 kHz:iin asti (Fletcher ja Rossing 1991).



Kuva 5.6 Huilun suukappaleessa sijaitsevan ontelon akustista pituutta vastaava päätykorjaus ΔL (mm) taajuuden funktiona. Kuvassa esitetään päätykorjaus, kun korkki on sijoitettu kuudelle eri etäisyydelle (mm) puhallusaukon keskipisteestä (Fletcher ja Rossing 1991).

Korkkia ei pidä siirtää kovin kauas puhallusaukosta, sillä ontelon impedanssi aiheuttaa huilun tuloadmittanssiin suurille taajuuksille kohdan, jossa ei ole huippuja. Kun ontelon tilavuutta kasvatetaan, siirtyy vaimennettu alue pienemmille taajuuksille ja huilun korkeiden äänien soitettavuus alkaa kärsiä (Benade 1976). Resonanssit vaimenevat, koska niitä vastaavassa seisovassa aallossa painemaksimi joutuu puhallusaukon lähelle (Benade 1976).

Poikkihuilun suukappale ei ole suora putki, vaan se kapenee rungon liitoskohdasta lähtien suuaukkoon asti (kuva 5.4). Liitoskohdassa halkaisijan on luonnollisesti oltava sama kuin rungon eli 19 mm. Puhallusaukon kohdalla halkaisija on yleensä noin 17 mm. Suukappaleen lievä kartiomaisuus nostaa huilun toisen moodin taajuutta (Benade 1976). Tällä tavoin voidaan kompensoida alimman oktaavin alalla soitettaessa tapahtuva äänenkorkeuden nousu voimakkaasti puhallettaessa.

Puhallusaukon muotoilu vaikuttaa merkittävästi sekä huilun sointiin että äänen voimakkuuteen. Suurimmalle osalle soittajia halkaisijaltaan noin 10 millimetrin kokoinen aukko on sopivin. Pienempi puhallusaukko aiheuttaa liian vaimean äänen. Suurempi aukko mahdollistaa suuren äänenpaineen, mutta huilua on tällöin hankalampi saada soimaan.

Böhm suunnitteli puhallusaukon nykyisen muodon ja koon. Se on neliömäinen ja mitoiltaan 10 mm kertaa 12 mm. Puhallusaukko on nykyään sijoitettu huulilevyyn, joka on noin 5 millimetrin paksuinen. Huulilevyn ansiosta seinämän efektiivinen paksuus puhallusaukon kohdalla on sama kuin puisissa huiluissa ja aukko syöttää putkea tehokkaammin (Fletcher ja Rossing 1991).

Huilun suukappaleen *valmistusmateriaalilla* ja erityisesti *seinämän paksuudella* saat-
taa olla merkitystä huilun ääneen, mutta sitä ei ole koskaan osoitettu (Fletcher *et al.*
1982). Joka tapauksessa materiaalin vaikutus kuultavaan ääneen on huomattavasti vä-
häisempi kuin suukappaleen geometrian vaikutus.

5.3 Ilmasuihkun dynamiikka

5.3.1 Ilmasuihkun käyttäytyminen

Fluidisuihkun dynamiikkaa on tutkittu noin 100 vuoden ajan. Havaitut ilmiöt ja saavu-
tetut tulokset ovat sovellettavissa monille aloille. Huilun akustiikkaan liittyviä virtaus-
dynaamisia ilmiöitä on selvitetty Fletcherin ja Rossingin kirjassa (1991).

Bickley on johtanut kapeasta raosta tulevan laminaarisen ilmasuihkun nopeudelle
seuraavan yhtälön (Fletcher ja Rossing 1991):

$$V(z) = V_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{z}{b}\right) \quad (5.4)$$

missä

$$V_0 = 0,4543 \left(\frac{J^2}{\nu x}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (5.5)$$

b on ilmasuihkun *paikallinen puolipaksuus*

$$b = 3,635 \left(\frac{\nu^2}{J}\right)^{\frac{1}{3}} x^{2/3} \quad (5.6)$$

ν on *kinemaattinen viskositeetti*

$$\nu = 1,5 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} \quad (5.7)$$

ja J on *virtausintegraali*

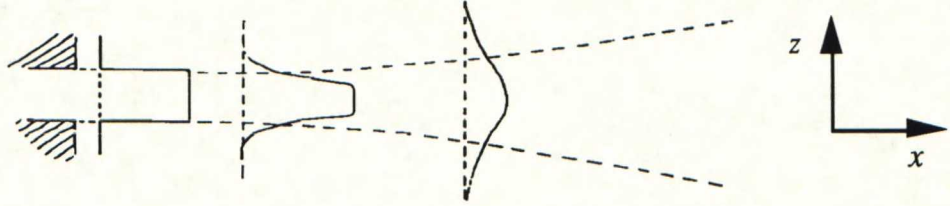
$$J = \int_{-\infty}^{\infty} V^2 dz \quad (5.8)$$

missä V on *suihkun keskiosan nopeus*. Yhtälön (5.4) mukaisesti aukosta tulevan ilma-
suihkun nopeuden profiili on kellomainen.

Huilussa ilmasuihku ei ole välttämättä laminaarinen, vaan se voi olla myös turbu-
lентtinen. Nopeusprofiili on silti kellomainen ja noudattaa likimain yhtälöä (5.4). Tosin
puolipaksuus b on verrannollinen etäisyyteen x ja keskiosan nopeus $V = V(x,0)$
noudattaa funktiota $x^{-1/2}$. Turbulenttien virtausten teoria ei ole riittävän kehittyntä
pystyäkseen tarkasti ennustamaan turbulentin ilmasuihkun nopeuden ja laajenemisen
kehittymisen. On kuitenkin oletettavaa, että turbulentin suihkun käyttäytyminen on li-
kimain samankaltainen kuin laminaarisen suihkun (Fletcher ja Rossing 1991).

Luonnossa havaittava raosta virtaava ilmasuihku käyttäytyy kuvan 5.7 mukaisesti

(Fletcher ja Rossing 1991). Aluksi suihkun nopeusprofiili on suorakaiteen muotoinen, mutta muuttuu kellomaiseksi suihkun reunoilla tapahtuvan diffuusion vuoksi. Samalla suihku muuttuu vähitellen turbulentiksi ja sen nopeus pienenee.



Kuva 5.7 Raosta tulevan ilmasuihkun nopeusprofiili muuttuu etäisyyden funktiona (Fletcher ja Rossing 1991).

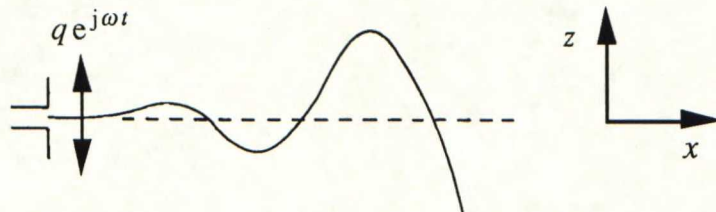
5.3.2 Poikittainen aaltoliike ilmasuihkussa

Huilussa ilmasuihku ei virtaa vapaaseen kenttään, vaan resonaattorin suuaukon yli. Tällöin ilmasuihkuun vaikuttaa *akustinen tilavuusnopeus resonaattorin suulla*. Myös äänipaineella on vähäinen vaikutus ilmasuihkuun, mutta se oletetaan merkityksettömäksi. Resonaattorin suuaukolla tilavuusnopeus on ilmasuihkuun nähden kohtisuorassa. Yhden teorian mukaan tilavuusnopeudesta johtuva ilman *tilavuuden poikkeama* taivuttaa suihkua ylös ja alas aiheuttaen siihen sinimuotoisia poikittaisia moodeja, joita kutsutaan *Rayleigh'n epästabiilisusaalloiksi* (Fletcher ja Douglas 1980).

Nytemmin Coltman (1992b) on havainnut, ettei ilmasuihkuun muodostuvaa poikittaista aaltoilua voida selittää yksinomaan tilavuuden poikkeaman avulla. Coltman pitää todennäköisenä vaikuttimena äänipaineen gradienttia tai hiukkasnopeutta putken suuaukolla. Tässä työssä tarkastellaan kuitenkin tilavuuden poikkeamaa, sillä sen avulla on aiemmin onnistuttu simuloimaan ilmasuihkulla toimivia soittimia varsin todenmukaisesti (esim. McIntyre *et al.* 1983).

Mikäli suihkuun vaikuttaa kuvan 5.8 mukaisesti tilavuusnopeus $qe^{j\omega t}$, voidaan *ilmasuihkun poikkeama* h_1 (engl. acoustic displacement) esittää seuraavasti (Fletcher ja Rossing 1991):

$$h_1 = -j \frac{q e^{j\omega t}}{\omega}, \quad [h_1] = 1 \text{ m}^3 \quad (5.9)$$



Kuva 5.8 Akustinen tilavuusnopeus aiheuttaa ilmasuihkuun poikittaisen aaltoliikkeen (Fletcher ja Rossing 1991).

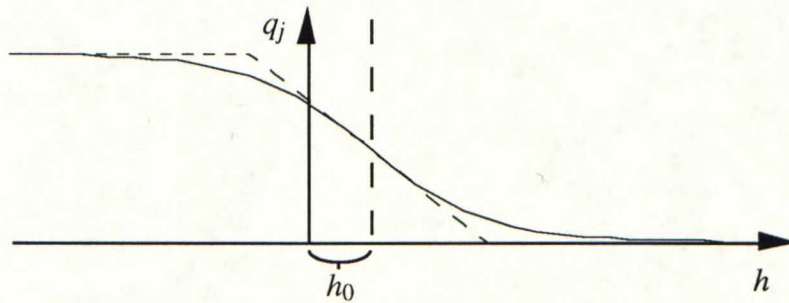
Aukon välittömässä läheisyydessä, eli kohdassa $x = 0$, ilmasuihku ei kuitenkaan voi aaltoilla, joten on vaadittava, että tällöin suihkuun vaikuttaa poikkeama $-h_1$. Poikkeama etenee nopeudella u ja kasvaa etäisyyden mukana funktion $e^{\mu x}$ mukaisesti. Yleinen yhtälö tilavuusnopeuden häiritsemän ilmasuihkun poikkeamalle voidaan lausua (Fletcher ja Rossing 1991):

$$h(x) = -j \frac{q}{\omega} [e^{j\omega t} - e^{\mu x} e^{j\omega(t-x/u)}] \quad (5.10)$$

missä μ on ilmasuihkun *kasvuparametri* ja u suihkun *etenemisnopeus*. Fletcher ja Rossing (1991) ehdottavat, että funktion $e^{\mu x}$ tilalla voitaisiin käyttää funktiota $\cosh(\mu x)$, koska ilmasuihku ei voi muuttaa suuntaansa välittömästi raosta lähdettyään. Kumpikaan funktio ei kuvaa todellista tilannetta aivan tarkasti. Kuvassa 5.8 on esitetty yksinkertaistettu tilanne, jossa u ja μ ovat vakioita. Todellisuudessa kumpikin on etäisyyden x funktio.

Lähellä rakoa kuvan 5.8 kuvaaja on tasainen, mutta aaltoilu alkaa vähitellen kasvaa eksponentiaalisesti, kun yhtälön (5.10) oikean puolen termi $e^{\mu x} e^{j\omega(t-x/u)}$ alkaa domioida. Yli yhden aallonpituuden etäisyydellä raosta yhtälön vasen puoli on merkitykseltön. Tällöin kasvavan poikittaisen aallon vaihenopeus u on noin puolet ilmasuihkun nopeudesta V . Kaukana raosta ilmasuihku muuttuu turbulentiksi ja hajoaa pyörteiksi. Huilussa ilmasuihkun pituus on niin lyhyt, ettei suihku ole vielä ehtinyt hajota kohdassaan huuliaukon reunan (Coltman 1968).

5.3.3 Ilmasuihkun aiheuttama epälineaarisuus



Kuva 5.9 Ilmasuihkun poikkeaman h ja resonaattoriputkeen menevän tilavuusnopeuden q_j suhdetta kuvaava funktio. Katkoviivalla on esitetty vastaava funktio ilmasuihkun nopeusprofiilin ollessa suorakaiteen muotoinen. Ilmasuihkun keskiosan poikkeama h_0 siirtää funktiota horisontaalisesti.

Kaikkien puhallinsoittimien toiminta on epälineaarista. Huilussa epälineaarisuus aiheutuu ilmasuihkun kellomaisesta *nopeusprofiilista*, joka saadaan yhtälöstä (5.4). Resonaattoriin menevä tilavuusnopeus q_j voidaan ratkaista integroimalla nopeuden yhtälö pysty akselin z suhteen (Fletcher ja Rossing 1991):

$$q_j = W \int_{-\infty}^{h_0} V_0 \operatorname{sech}^2\left(\frac{z-h}{b}\right) dz \quad (5.11)$$

missä W on ilmasuihkun leveys. Suorittamalla integrointi saadaan

$$q_j = WbV_0 \left[\tanh\left(\frac{h_0-h}{b}\right) + 1 \right] \quad (5.12)$$

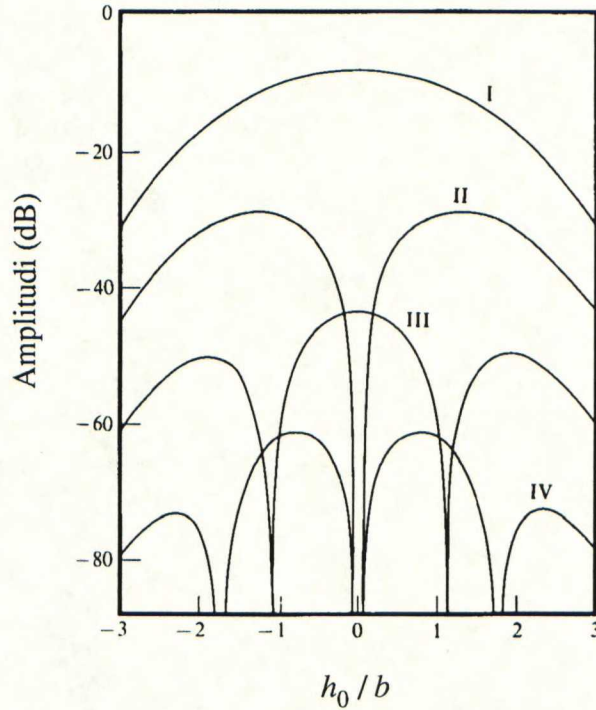
missä h on ilmasuihkun kärjen poikkeama yhtälöstä (5.10) ja h_0 on huuliaukon reunan etäisyys ilmasuihkun keskitasosta. Mikäli $h_0 = 0$, osuu ilmasuihku symmetrisesti huuliaukon reunaan. Käytännössä h vaihtelee ajan suhteen nopeasti, mutta h_0 hyvin hitaasti ja se voidaan olettaa vakioksi.

Kuvassa 5.9 esitetään tilavuusnopeus q_j poikkeaman h funktiona. Vertailun vuoksi kuvassa on esitetty katkoviivalla tilavuusnopeutta kuvaava funktio, kun ilmasuihkun profiili on suorakaiteen muotoinen. Tällöin funktio olisi jyrkkä rajoitin.

Oletetaan poikkeaman h vaihtelevan sinimuotoisesti, jolloin $h = a \cos(2\pi ft)$, missä a on amplitudi. Tilanne on tällöin analoginen perinteisen aaltomuotoilun kanssa. Yhtälöstä (5.12) voidaan laskea Fourier-muunnos ja selvittää analyyttisesti tilavuusnopeuden spektri: mikäli ilmasuihkun poikittaisen aaltoilun amplitudi a on pienempi kuin ilmasuihkun puolipaksuus b , toisin sanoen $a < b$, on n :nnen harmonisen amplitudi verrannollinen lukuun $(a/b)^n$ (Fletcher ja Rossing 1991).

Spektrin sisältö riippuu amplitudin lisäksi ilmasuihkun keskiosan poikkeamasta huuliaukon reunasta h_0 . Kuvassa 5.10 on esitetty diagrammi, josta ilmenee kunkin harmonisen suhteellinen osuus poikkeaman h_0 funktiona. Symmetrisessä tapauksessa, kun $h_0 = 0$, ei parillisia harmonisia synny lainkaan, sillä funktio q_j (yhtälö 5.12) on *pariton* (vrt. 3.1.2 Aaltomuotoilu).

Harmonisten syntymisen lisäksi yhtälön (5.12) esittämän funktion muoto aiheuttaa suurilla poikkeaman h arvoilla kyllästymisen. Siksi huiluun syötettävällä akustisella teholla on yläraja, joka riippuu tulosta WbV_0 (Fletcher ja Rossing 1991). Kun poikkeama h on hyvin suuri, on huiluun menevän tilavuusnopeuden aaltomuoto suorakaiteen muotoinen, eikä amplitudin kasvattaminen enää muuta tilannetta. Tästä johtuen huilusoittimien äänenvoimakkuuden dynaaminen vaihtelu on suhteellisen rajoitettua.



Kuva 5.10 Perustaajuuden ja kolmen ensimmäisen harmonisen suhteellinen amplitudi desibeleinä reunan suhteellisen poikkeaman h_0/b funktiona (Fletcher ja Douglas 1980).

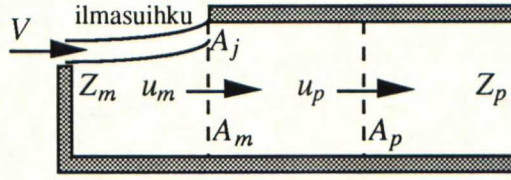
5.4 Huilun äänentuottomekanismi

Huilun ääni syntyy aaltoilevan ilmasuihkun osuessa resonaattoriputkessa olevaan särmään kuvan 5.1b mukaisesti. Coltman (1976) on esittänyt huilun äänentuottomekanismin seuraavanlaisena tapahtumaketjuna:

- 1) Ilmasuihkuun aiheutuu poikittainen aalto.
- 2) Aaltoilu laajenee edetessään kohti särmää.
- 3) Aaltoileva suihku törmää särmään aiheuttaen muutoksen resonaattorin suun tilassa, mikä vaikuttaa ilmasuihkuun (kohta 1).

Ilmasuihkuun vaikuttava tilavuusnopeus johtuu sekä resonaattoriputkessa tapahtuvasta oskillaatiosta että ilmasuihkun aiheuttamasta tilavuusnopeudesta suuaukolla. Coltman (1976) on esittänyt ilmeisesti virheellisesti, että ilmasuihkun poikkeama riippuisi pelkästään putkessa vallitsevasta seisovasta aallosta.

5.4.1 Huilun toiminnan lineaarinen tarkastelu



Kuva 5.11 Kaavamainen kuva huilun suuaukosta, jossa esitellään matemaattisessa tarkastelussa käytettävät suureet.

Huilun tai muun ilmasuihkulla herätettävän huilusoittimen lineaarista toimintaa voidaan tarkastella kuvan 5.11 mallin avulla (Fletcher ja Rossing 1991). Tässä tapauksessa oletetaan, että ilmasuihku, jonka nopeus on V , osuu putkessa olevaan reunaan ja peittää tällöin putken poikkipinta-alasta osuuden A_j . Samassa kohdassa putkea etenee hiukkasnopeus u_m alan A_j läpi. Putken poikkileikkauksen ala on kokonaisuudessaan A_p eli:

$$A_p = A_m + A_j \quad (5.13)$$

Lisäksi oletetaan, että lyhyen matkan päässä putken sisällä hiukkasnopeus on muuttunut homogeeniseksi koko putken alalla ja sen suuruus on u_p . Toisin sanoen putkessa etenee tällöin tilavuusnopeus q_p :

$$q_p = A_p u_p = (A_m + A_j) u_m + A_j V \quad (5.14)$$

Kun suuaukon ja putken liitoskohdasta näkyy suuaukon impedanssi Z_m ja putken impedanssi Z_p , voidaan tilavuusnopeus q_p lausua toisin (Fletcher ja Rossing 1991):

$$q_p = \frac{Z_m}{Z_p + Z_m} A_j V + \frac{\rho V^2}{Z_p + Z_m} \frac{A_j}{A_p} \quad (5.15)$$

missä ρ on ilman tiheys. Yhtälön vasemmanpuoleinen tekijä vastaa ilmasuihkun tilavuusnopeuden vaikutusta putken suun impedanssissa Z_m ja oikea puoli ilmasuihkun dynaamisen paineen ρV^2 aiheuttamaa tilavuusnopeutta. Yhtälöstä (5.15) nähdään, että putkessa etenevä tilavuusnopeus saavuttaa maksiminsa, kun suuaukon ja putken impedanssien sarjaankytkentä saavuttaa miniminsä, eli admittanssi saavuttaa maksiminsa. Tämä on ehto suuaukon impedanssilla Z_m kuormitetun putken resonanssille.

Putken suuaukon impedanssi Z_m voidaan lausua pienillä taajuuksilla päätykorjauksen ΔL avulla seuraavasti:

$$Z_m = \frac{j\rho\omega \Delta L}{A_p} \quad (5.16)$$

Tällöin putkessa etenevä tilavuusnopeus q_p voidaan esittää uudessa muodossa:

$$q_p = \frac{(\rho V + j\rho\omega \Delta L) V A_j}{A_p (Z_p + Z_m)} \quad (5.17)$$

Nyt nähdään, että tilavuusnopeuteen q_p vaikuttaa kaksi termiä, joiden vaihe-ero on 90° ja joista toinen riippuu taajuudesta. Käytännössä $\rho\Delta L > V$, joten tilavuusnopeuden aiheuttama termi dominoi yhtälössä (5.17) paineriippuvuuden jäädessä lähes merkityksettömäksi (Fletcher ja Rossing 1991). Koska tilavuusnopeus q_p aiheuttaa myös ilmasuihkun aaltoilun, voidaan todeta, että aaltoilu johtuu lähinnä resonaattoriputkessa etenevää tilavuusnopeudesta eikä paineesta.

5.4.2 Ilmasuihkun admittanssi

Huilun toimintaa kannattaa tutkia erityisesti sen eri osien admittanssien kannalta, sillä huilu soi parhaiten kun sen suuaukolta näkyvä tuloadmittanssi on maksimissaan. Huilua voidaan tarkastella järjestelmänä, joka koostuu generaattoriosan ja resonaattoriosan admittanssien rinnankytkennästä. Generaattori voidaan puolestaan esittää puhallusaukon admittanssin ja ilmasuihkun admittanssin rinnankytkentänä.

Fletcher ja Rossing (1991) ovat johtaneet ilmasuihkun admittanssille seuraavan lausekkeen, joka on varsin totuudenmukainen approksimaatio putken alinta harmonista korkeammilla taajuuksilla.

$$Y_j = \frac{VW}{\rho\omega^2\Delta L} \frac{A_p}{A_m} e^{i\omega L} e^{-j\left(\frac{\omega L}{u} + \phi\right)} \quad (5.18)$$

missä V on ilmasuihkun nopeus, W ilmasuihkun leveys, ρ ilman tiheys, ΔL puhallusaukon päätykorjaus, A_p ja A_m kuvan 5.11 mukaiset pinta-alat, $u = V/2$ on poikittaisen aallon nopeus ja ϕ yhtälössä (5.17) esiintyvien tilavuusnopeudesta ja paineesta johtuvien termien aiheuttama vaihesiirto, joka on tyypillisesti pieni luku.

Kun yhtälön (5.18) käyttäytymistä tutkitaan kulmataajuuden funktiona pitäen nopeudet V ja u ja siten myös puhalluspaine vakiona, havaitaan, että admittanssi Y_j saa arvoja kompleksitasossa kiertävällä spiraalilla. Huilu soi parhaiten, kun admittanssi Y_j on reaalinen ja negatiivinen (Fletcher ja Rossing 1991). Kun admittanssi saa arvoja kompleksitason vasemmassa puolitasossa, käyttäytyy ilmasuihku negatiivisen resistanssin tapaisesti ja syöttää tehoa resonaattoriin. Taajuuksilla, joilla admittanssi saa arvoja oikeassa puolitasossa, ilmasuihku aiheuttaa energiahäviötä eikä soitin voi soida.

5.4.3 Herätteen ja resonaattorin vaihesuhteet

Ilmasuihkun lähtönopeus V_0 saadaan seuraavasta yhtälöstä (Fletcher ja Rossing 1991):

$$V_0 = \sqrt{\frac{2p_0}{\rho}} \quad (5.19)$$

missä p_0 on puhalluspaine, joka on tyypillisesti noin 1 kPa, ja ρ on ilman tiheys. Nopeudeksi V_0 saadaan noin 40 m/s ja poikittaisen aaltoliikkeen etenemisnopeudeksi u noin 20 m/s. Huilua soittaessa ilmasuihkun pituus on noin 1 cm. Tästä johtuen poikkeaman etenemisviive τ on noin puoli millisekuntia. Ilmasuihkun leviämisestä johtuen viive voi olla pitempikin, jolloin se on resonaattorin jaksonajan suuruusluokkaa.

Useissa eri tutkimuksissa on havaittu viipeen τ arvon vaihtelevan runsaasti (McIntyre *et al.* 1983). Suurimmillaan viive τ on hieman yli puolet ja tavallisesti tarkalleen puolet putken alimman resonanssin jaksonajasta (Coltman 1968). Puhallettaessa voimakkaasti viive τ on vähän pitempi kuin jakson neljännes. Tällöin huilu soi ylävireisesti.

Jos resonaattorilla on vain yksi resonanssitaajuus, aiheuttaa se samantaajuisen poikittaisen värähtelyliikkeen ilmasuihkuun. Poikittaisen värähtelyn amplitudi suurenee aallon edetessä. Lopulta ilmasuihku osuu puhallusaukon reunaan ja syöttää resonaattoriin tilavuusnopeuspulsseja resonanssitaajuudella. Kun poikittaisen aaltoliikkeen vaihe on oikeassa suhteessa resonaattoriin nähden, oskillaatio säilyttää itsensä.

Käytännössä ilmasuihkussa etenee lähes sinimuotoinen poikittainen aalto, vaikka resonaattorilla onkin täydellinen harmonisten sarja. Tämä johtuu pääosin kahdesta syystä (Fletcher ja Douglas 1980):

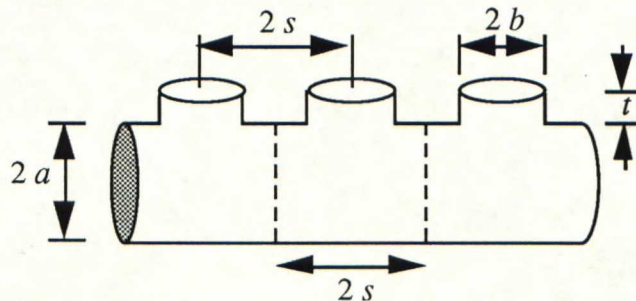
- 1) Putken sisällä etenevä tilavuusnopeus *alipäästösuojuuttuu* putken pään säteilykuormasta johtuen;
- 2) Ilmasuihkun värähtelyn aiheuttaa ilman *tilavuuden poikkeama* (engl. acoustic displacement), joka on *tilavuusnopeuden integraali*. Tästä aiheutuu vielä 6 dB:n lasku oktaavilla tilavuusnopeuden alkuperäiseen spektriin nähden.

Edellä mainittujen syiden seurauksena ilmasuihkuun syntyvä poikittainen aalto sisältää hyvin heikkoja harmonisia ja sen spektri voidaan olettaa monokromaattiseksi. Huomautettakoon, että tämän oletuksen vallitessa huilun toimintaperiaate on analoginen perinteisen aaltomuotoilusynteesin kanssa. Todettakoon lisäksi, että huilun alimmissa sävelissä perustaajuus saattaa olla merkittävästi heikompi kuin toinen harmoninen (Fletcher ja Douglas 1980). Tällöin edellä tehty oletus aiheuttaa tarkasteluun virheen.

5.5 Sormiaukot ja huilun äänen säteily

5.5.1 Suljetut sormiaukot

Huilun rungossa olevat sormiaukot vaikuttavat huomattavasti huilun spektriin. Sormiaukot voidaan tulkita putkessa oleviksi avoimiksi ja suljetuiksi *sivuhaaroiksi*. Lyhyesti sanoen *suljetut* sormiaukot toimivat *alipäästösuojuksina* ja *avoimet ylipäästösuojuksina* putkessa etenevän tilavuusnopeussignaalin kannalta (Benade 1960). Suotimien rajataajuuudet riippuvat aukkojen koosta sekä niiden välimatkasta putkessa.



Kuva 5.12 Suljettuja sormiaukkoja putkessa.

Benade (1960) on korostanut, että myös suljetuilla sormiaukoilla on merkitystä soittimen ääneen. Kuvassa 5.12 on putkessa kolme suljettua sormiaukkoa. Kytkennän voidaan ajatella rakentuvan T:n muotoisista kappaleista, joista jokainen koostuu putkesta, jonka säde on a ja pituus $2s$. Kunkin kappaleen keskellä on suljettu sivuhaara, jonka pituus on t ja säde b . Tällöin myös kahden vierekkäisen sivuhaaran keskipisteiden välinen etäisyys on $2s$, mikä ei ole totta ajatellen oikeaa huilua. Teoreettisessa tarkastelussa asialla ei ole merkitystä.

Sivuhaarojen ansiosta jokaisen T-kappaleen sisältämän *ilman tilavuus* ja siitä johtuen myös *puristuvuus* on suurempi kuin samanpituudessa suorassa putkessa (Benade 1976). Koska suljetussa sivuhaarassa oleva ilma ei kuitenkaan voi liikkua edestakaisin suljetun pään vuoksi, ei *ilman hitaus* T-kappaleessa poikkea suorasta putkesta. Näistä kahdesta seikasta johtuen sekä *aallon etenemisnopeus* että *putken akustinen impedanssi* ovat pienempiä kuin suorassa samanpituudessa putkenpätkässä (Benade 1976). Sivuhaaroja sisältävän putkenosan akustinen impedanssi voidaan lausua seuraavasti kulmataajuuden funktiona, kun häviöt jätetään huomioimatta (Benade 1960):

$$Z_0(\omega) = \frac{\rho c}{\pi a^2} \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \tan\left(\frac{\omega t}{c}\right) \tan\left(\frac{\omega s}{c}\right)}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \tan\left(\frac{\omega t}{c}\right) \cot\left(\frac{\omega s}{c}\right)}} \quad (5.20)$$

missä ρ on ilman tiheys, c äänen nopeus ja muut merkinnät samoja kuin kuvassa 5.12. Käytännössä sormiaukkojen välinen etäisyys $2s$ on paljon pienempi kuin putken perustaajuuden aallonpituus, joten yhtälöstä (5.20) voidaan tehdä *pientaajuusapproksimaatio* (Benade 1960):

$$Z_0 = \frac{\rho c}{\pi a^2} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{t}{s} \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.21)$$

Koska putken akustinen impedanssi toisaalta on (Fletcher ja Rossing 1991):

$$Z_0 = \frac{\rho c}{A} \quad (5.22)$$

missä A on putken poikkipinta-ala, voidaan selvittää suljettuja sivuhaaroja sisältävän putken *efektiivinen poikkipinta-ala* A_e (Benade 1960):

$$A_e = \pi a^2 \sqrt{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{t}{s}} \quad (5.23)$$

ja kun neliöjuuren alla oleva lauseke on hyvin pieni, voidaan pinta-alaa approksimoida seuraavasti:

$$A_e = \pi a^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a}\right)^2 \frac{t}{2s} \right] \quad (5.24)$$

Benade (1960) on johtanut äänen nopeudelle v_c yhtälön suljettuja sivuhaaroja sisältävässä putkenosassa etenemiskertoimen avulla. Kun äänen nopeus homogeenisessä

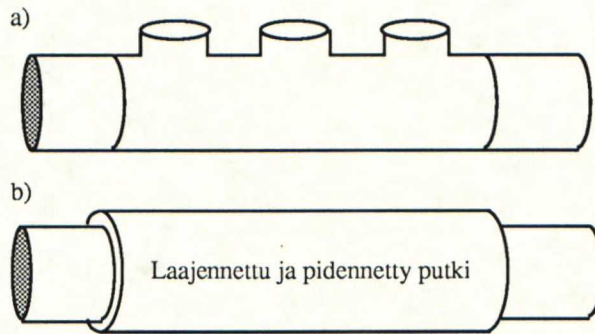
putkessa on c , on se suljettujen aukkojen tapauksessa:

$$v_c = c \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \frac{t}{s} \right] \quad (5.25)$$

Käytännössä tämä merkitsee putken efektiivisen pituuden sekä efektiivisen halkaisijan kasvua (kuva 5.13). Molemmat muuttuvat *kasvutekijällä* E_c , joka voidaan määrittää seuraavasti (Benade 1976):

$$E_c = 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \left(\frac{t}{2s} \right) \quad (5.26)$$

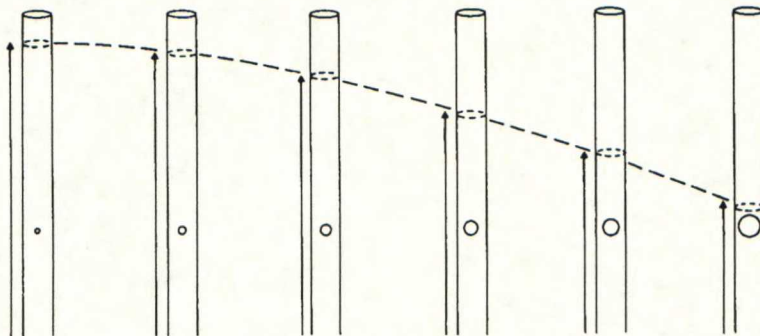
missä suureet ovat samat kuin kuvassa 5.12. Yleensä tekijän E_c aiheuttama muutos on noin 2-5 prosenttia.



Kuva 5.13 a) Putki, jossa on kolme suljettua lyhyttä sivuhaaraa. b) Vastaava putki, jossa kolme suljettua aukkoa sisältävä osa on korvattu tekijällä E_c pidennetyllä ja laajennetulla tasapaksulla osalla.

5.5.2 Avoimet sormiaukot ja putken pituuden päätykorjaus

Puhallussoittimissa äänen perustaajuutta muutetaan yleensä avaamalla tai sulkemalla soittimen rungossa olevia sormiaukkoja. Avoin aukko putken kyljessä lyhentää putken efektiivistä pituutta. Lyhennyksen määrä riippuu kuvan 5.14 mukaisesti aukon halkaisijasta: pieni avoin aukko lyhentää putkea vain hiukan, mutta kun aukko on suuri on putken efektiivinen pituus likimain sama kuin jos putki olisi katkaistu aukon kohdalta.



Kuva 5.14 Avoimen aukon halkaisijan vaikutus putken efektiiviseen pituuteen (Rossing 1982).

Koska huilun sormiaukot ovat halkaisijaltaan varsin suurikokoisia, voidaan huilun rungossa värähtelevän ilmapatsaan ajatella katkeavan suukappaleesta katsoen ensimmäisen avoimen aukon jälkeen. Käytännössä *kaksi ensimmäistä avointa aukkoa* vaikuttavat huilun äänen perustaajuuteen ja spektriin (Benade 1960).

Huilun putken todellisen fyysisen pituuden L ja efektiivisen pituuden $L + \Delta L$ erotus eli päätykorjaus ΔL voidaan määrittää, kun tiedetään suljettuja aukkoja sisältävän putkenosan akustinen impedanssi Z_c ja ensimmäisestä avoimesta aukosta putken loppuun näkyvä akustinen impedanssi Z_t sekä äänen keskinopeus putkessa, v_c (Benade 1960):

$$Z_t = jZ_c \tan\left(\frac{\omega \Delta L}{v_c}\right) \quad (5.27)$$

mistä voidaan ratkaista ΔL :

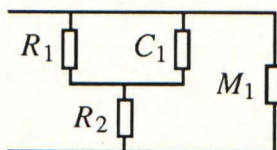
$$\Delta L = \frac{v_c}{\omega} \arctan\left(-\frac{jZ_c}{Z_t}\right) \quad (5.28)$$

Avoimia aukkoja tarkasteltaessa on huomattava, että aukkoa vastaavan avoimen sivuhaaran pituus ei olekaan sama kuin aukon fyysinen korkeus. Avoimen aukon tapauksessa on otettava huomioon *takertunut massa*, joka aiheuttaa aukon efektiivisen korkeuden suurenemisen tietyn päätykorjauksen verran.

Avoin sormiaukko ylipäästösuodattaa putkessa etenevää ääniaaltoa. Siksi putkessa ei esiinny aaltoliikettä avoimen aukon kohdalla *rajataajuuden* yläpuolella (Benade 1960). Äänipaine vaimenee avoimen aukon vaikutuksesta eksponentiaalisesti ja koska huilun sormiaukot ovat suuret, on vaimeneminen hyvin voimakasta: äänipaineen amplitudi on toisen avoimen aukon kohdalla noin 6% ensimmäisen aukon kohdalla havaittavasta (Benade 1960).

5.5.3 Putken avoimen pään säteilyimpedanssi

Kuten edellä mainittiin, voidaan huilun putken olettaa olevan katkaistu ensimmäisen avoimen aukon kohdalta. Putken avoimen pään säteilyimpedanssi on tässä tapauksessa sama kaikilla sormituksilla ja sille on mahdollista määrittää approksimatiivinen ratkaisu. Pitkän putken avoimessa päässä värähtelevän tasomännän säteilyimpedanssi voidaan esittää sähköakustisena sijaiskytkentänä kuvan 5.15 mukaisesti.



Kuva 5.15 Putken avoimen pään säteilyimpedanssin sijaiskytkentä (Beranek 1954).

Komponenttien arvot ovat seuraavat (Beranek 1954):

$$R_1 = \frac{0,504 \rho c}{\pi a^2} \quad (5.29)$$

$$R_2 = \frac{0,318 \rho c}{\pi a^2} \quad (5.30)$$

$$M_1 = \frac{0,1952 \rho}{a} \quad (5.31)$$

$$C_1 = \frac{5,44 a^3}{\rho c^2} \quad (5.32)$$

missä $\rho = 1,2 \text{ kg/m}^3$ on ilman tiheys, $c = 350 \text{ m/s}$ on äänennopeus ilmassa ja $a = 0,0095 \text{ m}$ on huilun rungon säde. Komponenttien numeeriset arvot ovat tällöin seuraavat: $R_1 = 7,466 \times 10^5$, $R_2 = 1,480 \times 10^6$, $M_1 = 24,66$ ja $C_1 = 3,173 \times 10^{-11}$.

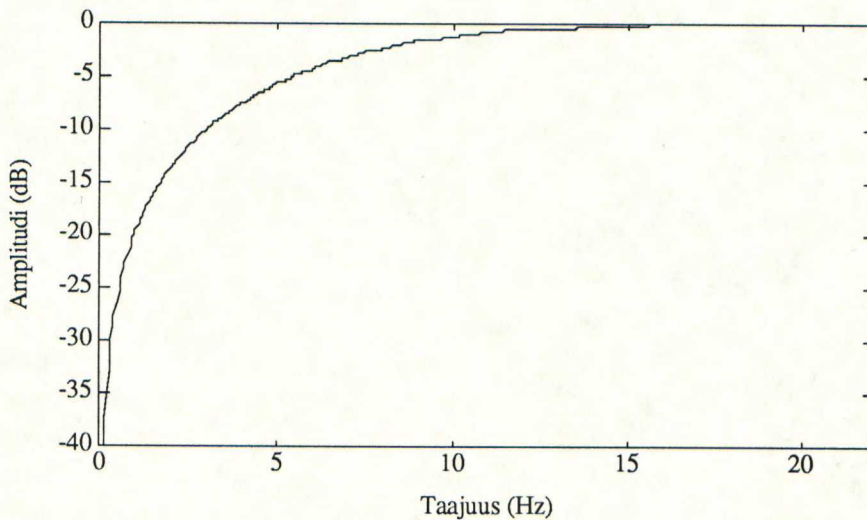
Edellisen perusteella voidaan johtaa lauseke huilun rungon avoimen pään säteilyimpedanssille:

$$Z_r(s) = \frac{C_1 M_1 R_1 R_2 s^2 + M_1 (R_1 + R_2) s}{C_1 M_1 R_1 s^2 + (C_1 R_1 R_2 + M_1) s + R_1 + R_2} \quad (5.33)$$

Kun komponenteille sijoitetaan lukuarvot, saadaan seuraava lauseke:

$$Z_r(s) = \frac{24,66 s + 3,882 \times 10^{-4} s^2}{1 + 2,682 \times 10^{-5} s + 2,623 \times 10^{-10} s^2} \quad (5.34)$$

Kuvassa 5.16 esitetään yhtälön (5.34) eli putken avoimen pään säteilyimpedanssin itseisarvo. Säteilyimpedanssilla on nollakohta taajuudella 0 Hz.



Kuva 5.16 Putken avoimen pään säteilyimpedanssin itseisarvo.

5.5.4 Huilun äänen säteilykuvio

Huilun äänen säteilykuvio on huomattavasti monimutkaisempi kuin vaskipuhaltimien tai ruokosoittimien (Fletcher ja Rossing 1991). Syynä on äänen säteily useasta eri kohdasta. Huilun ääni säteilee voimakkaimmin puhallusaukosta ja ensimmäisestä avoimesta sormiaukosta sekä lisäksi huomattavasti heikommin muista avoimista sormiaukoista.

Kun kaikki aukot on suljettu, ovat suuaukko ja putken avoin pää likimain yhtä voimakkaasti säteileviä lähteitä, joiden parittomat harmoniset ovat samassa vaiheessa, mutta parillisten harmonisten välillä on 180° :n vaihesiirto (Fletcher ja Rossing 1991). Tällöin parittomilla harmonisilla on säteilykuviossa minimi huilun akselin normaalin suuntaisella, putken keskeltä leikkaavalla tasolla (Fletcher ja Rossing 1991).

Säteilykuvio muuttuu aina sormiaukkoja avattaessa tai suljettaessa. Korkeilla äänillä ja matalien sävelten ylemmillä harmonisilla on säteilykuviossa minimejä myös muualla kuin akselin normaalin suunnassa (Fletcher ja Rossing 1991).

5.6 Huilun rungon mallintamisesta

5.6.1 Benaden malli

Arthur H. Benade (1960) ehdotti, että huilun runko voitaisiin todennäköisesti mallintaa suhteellisen todenmukaisesti kuvaamalla se järjestelmänä, joka koostuu seuraavista kolmesta osasta:

- 1) suora putki puhallusaukosta ensimmäiseen suljettuun aukkoon,
- 2) suora edellistä paksumpi putki, joka kuvaa suljetuista sormiaukoista muodostuvaa alipäästöluonteista rungon osaa ja
- 3) siirtolinja, jossa on kaksi avointa aukkoa (ensimmäiset avoimet aukot).

Hieman karkeampi approksimaatio saadaan poistamalla putken avoimeen päähän ehdotettu siirtolinja. Tällöin putken pääty voidaan mallintaa pitkän katkaistun putken säteilyimpedanssilla. Jotta malli olisi realistinen, on siihen lisäksi sisällytettävä energiahäviöt.

5.6.2 Akustiset energiahäviöt putkessa

Putkessa etenevässä ääniaallossa tapahtuu jatkuvasti energiahäviöitä. Ne voidaan jakaa kahteen luokkaan (Kinsler ja Frey 1950):

- 1) väliaineen rajapinnassa aiheutuvat häviöt ja
- 2) väliaineessa syntyvät häviöt.

Rajapinnan läheisyydessä ilmenevät häviöt ovat erityisen merkittäviä silloin, kun väliaineen tilavuus on pieni verrattuna rajapinnan alaan, kuten esimerkiksi kapeassa putkessa. Kyseisessä tilanteessa tapahtuu sekä *viskoottisia* että *lämpöhäviöitä*.

Akustinen hiukkasnopeus on suurimmillaan putken keskiakselilla ja se pienenee nol-

laan siirryttäessä seinämään. Tällöin ääniaalto menettää energiaa *viskoottisen kitkan* takia. Seinän lähellä tapahtuu lämpöhäviöitä, koska akustiseen aaltoliikkeeseen liittyvät tihentymät ja harventumat eivät käyttäydy adiabaattisesti, toisin sanoen lämpötila ei muutu vastaavasti paineen muutoksen yhteydessä. Sen sijaan lämpöenergiaa siirtyy väliaineesta seinämiin tihentymän aikana ja puolestaan seinämistä väliaineeseen harventumien aikana (Kinsler ja Frey 1950). Samalla äänienergian määrä ääniaallossa vähenee.

Lisäksi äänienergiaa absorboituu suoraan seinämiin, mutta jäykkäseinäisen putken ollessa kyseessä ilmiön vaikutus on erittäin vähäinen, sillä mekaaninen värähtely ei johdu siihen (ks. 5.2.1). Siksi voidaankin sanoa, ettei huilun rungon materiaalilla ole merkitystä ääneen.

Väliaineessa tapahtuvia häviöitä on kolmea eri tyyppiä: *lämpöhäviöt* sekä *viskoottiset* ja *ilmamolekyylien välisen energianvaihdon* aiheuttamat häviöt (Kinsler ja Frey 1950). Nämä häviömekanismi ovat merkittäviä lähinnä suurissa vapaissa tiloissa, kuten saleissa tai laajoissa putkissa. Huilun rungon kapeudesta johtuen väliaineessa syntyvien häviöiden vaikutus voidaan sivuuttaa merkityksettömänä.

Seuraavassa tarkastellaan ainoastaan rajapinnassa tapahtuvia viskoottisia ja lämpöhäviöitä, sillä vain niillä on käytännössä merkitystä huilun ääneen. Molempiin häviömekanismeihin liittyy putken seinämän tuntumassa sijaitseva *rajakerros* (engl. boundary layer), jossa häviöt tapahtuvat (Fletcher ja Rossing 1991). *Viskoottisen kitkan rajakerroksen paksuus* voidaan esittää seuraavasti:

$$\delta_v = \sqrt{\frac{\eta}{2\pi f \rho}} \quad (5.35)$$

missä η on viskositeetti ja ρ on ilman tiheys sekä f taajuus hertseinä. *Lämpöhäviöiden rajakerroksen paksuus* saadaan puolestaan seuraavasta yhtälöstä:

$$\delta_t = \sqrt{\frac{\kappa}{2\pi f \rho C_p}} \quad (5.36)$$

missä κ on lämmönjohtavuus ja C_p ilman ominaislämpö vakiopaineessa. Erityisesti on syytä huomata, että molempien rajakerrosten paksuus muuttuu taajuuden funktiona ja on kääntäen verrannollinen sen neliöjuureen. Käytännössä kummankin rajakerroksen paksuus on suuruusluokaltaan noin 0,1 mm.

Viskoottinen kitka ja lämpöenergian siirtyminen ilman ja putken seinän välillä muuttavat putken akustisen impedanssin Z_0 kompleksiseksi suureeksi. Samoin myöskään *aaltoluku* k ei enää ole ω/c , vaan se on esitettävä seuraavanlaisesti (Fletcher ja Rossing 1991):

$$k = \frac{\omega}{v} - j\alpha \quad (5.37)$$

missä v on *aaltoliikkeen vaihenopeus* ja α on *vaimennuskerroin* pituusyksikköä kohti.

Fletcher ja Rossing (1991) antavat approksimaatiot nopeudelle v ja vaimennuskerroin α :

$$v \approx c \left(1 - \frac{1,65 \times 10^{-3}}{a \sqrt{f}} \right) \quad (5.38)$$

ja

$$\alpha \approx 3 \times 10^{-5} \frac{\sqrt{f}}{a} \quad (5.39)$$

Yhtälön (5.38) perusteella putkessa etenevän aallon vaihenopeus v siis pienenee taajuuden funktiona, mutta varsin loivasti. Sen sijaan vaimennuskerroin α kasvaa taajuuden neliöjuureen verrannollisena. Käytännössä tämä merkitsee sitä, että viskoottisen kitkan ja lämpöhäviöiden takia putki on luonteeltaan alipäästösuodin.

5.7 Huilun soiton akustiikkaa

5.7.1 Soittajan säätelemät parametrit

Huilunsoittaja hallitsee soittimensa sointiväriä säätämällä seuraavia parametrejä (Fletcher 1975):

- puhalluspaine
- suihkun suunta
- ilmasuihkun pituus
- suihkun paksuus

Ilmasuihkun pituus muuttuu huilistin siirtäessä huuliensa asemaa puhallusaukkoa ympäröivää huulilevyä vasten. Ilmasuihkun paksuutta soittaja voi muuttaa säätelemällä huuliotettaan eli *ansatsiaan* (saks. Ansatz, engl. embouchure), johon liittyvät huilien välisen aukon koko ja muoto.

Fletcher (1975) on mitannut soittajan suuhun asetetun ohuen putken avulla *puhalluspaineen* muuttumisen soitetun sävelen perustaajuuden funktiona. Paine noudattaa likimäärin seuraavaa empiirisesti määritettyä yhtälöä:

$$p_0 \approx 0,8 \frac{\text{Pa}}{\text{Hz}} f \quad (5.40)$$

missä f on sävelen nimellinen perustaajuus hertseinä. Puhalluspaine on luonnollisesti suurempi soitettaessa voimakkaasti kuin hiljaa, mutta vaihtelu on suhteellisen vähäistä. Paine poikkeaa yhtälön (5.40) antamasta arvosta yleensä korkeintaan 30% (Fletcher 1975). Taitavien huilistien puhalluspaine on aina mahdollisimman voimakas ja huilu on siirtymäisillään ylempään moodiin (Fletcher 1975). Ilmeisesti tämä seikka saa aikaan kirkkaan soinnin, jota lähes kaikki huilistit tavoittelevat. Lisäksi suuri puhalluspaine auttaa stabiloimaan huilun virityksen (Fletcher ja Rossing 1991).

Myös *ilmasuihkun pituus* riippuu varsin selvästi sävelen perustaajuudesta. Keski-

määräinen suhde suihkun pituuden ja taajuuden välillä on seuraava (Fletcher 1975):

$$l \approx 0,14 \frac{\text{m}}{\sqrt{\text{Hz}}} \sqrt{f} \quad (5.41)$$

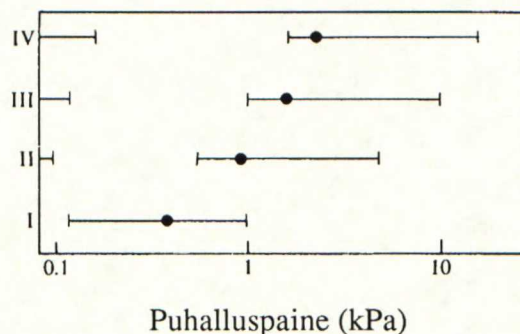
Tärkeä huilun ääntä elävöittävä menetelmä on *vibrato*, jota soittajat käyttävät yleensä varsinkin pitkien sävelten aikana. Vibrato on puhalluspaineen nopeaa muuttamista soiton aikana. Yleensä huilistit muuttavat vibraton aikana puhalluspainetta sinimuotoisesti. Vaihtelun taajuus on noin 5 Hz ja amplitudi 10% puhalluspaineesta (Fletcher 1975).

Vibratossa äänen perustaajuuden amplitudi vaihtelee varsin vähän, mutta ylempien harmonisten taso vaihtelee runsaasti. Spektrikomponenttien taajuudet eivät muutu juuri lainkaan. Vibraton vaikutusta huilun ääneen ei siten voida verrata amplitudi- eikä taajuusmodulaatioon. Huilun vibratosta käytetäänkin nimitystä *sointiväri-vibrato* (engl. timbre vibrato).

5.7.2 Moodien siirtymät ja ylipuhallus

Tavallisesti huilun tuottaman sävelen korkeutta muutetaan vaihtamalla sormitusta eli muuttamalla putken efektiivistä pituutta. Huilisti voi muuttaa soittimensa äänenkorkeutta myös *sormitusta vaihtamatta*. Hän voi ansaita, huilun ja huulien välistä asemaa sekä puhalluspainetta varioimalla saada huilun värähtelyn siirtymään ylempään moodiin. Tapahtumaa kutsutaan *ylipuhallukseksi*. Etevä huilisti kykenee tällä tavalla soittamaan minkä tahansa huilun kuudesta alimmasta moodista.

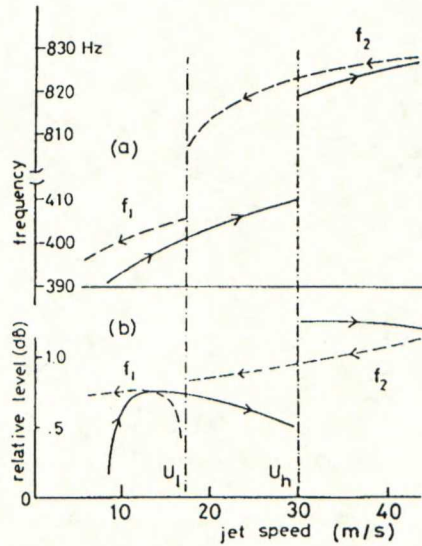
Vaikka huilisti ylipuhaltaessaan säätääkin useita eri parametrejä, johtuu moodin siirtymä ainoastaan ilmasuihkussa etenevän poikittaisen aallon viipeen muuttumisesta. Soittaja ei voi saada aikaan tarvittavaa muutosta muuttamalla esimerkiksi ainoastaan ilmasuihkun pituutta, sillä pitempi ilmasuihku vaatii suuremman puhalluspaineen säilyäkseen pyörteettömänä suuaukon takasärmään asti (Fletcher ja Rossing 1991). Vaihe-suhteet putkeen syntyvien seisovien aaltojen ja tehoa syöttävän ilmasuihkun välillä ovat kullakin viipeen arvolla edulliset vain tietyn moodin syttymiselle. Kuvassa 5.17 näkyvät neljän ensimmäisen harmonisen syttymiselle edulliset alueet puhalluspaineen funktiona. Poikittaiseen aaltoon liittyvä viive on suoraan verrannollinen paineeseen.



Kuva 5.17 Huilusoittimen neljän ensimmäisen moodin syttymiselle edulliset alueet puhalluspaineen funktiona (Fletcher ja Rossing 1991).

Kun viivettä τ pienennetään huilun putken perusjakson neljännekseen, kuudennekseen ja kahdeksannekseen, siirrytään moodeihin II, III ja IV ja niin edelleen (McIntyre *et al.* 1983). Moodisiirtymään liittyy *hystereesiä*, sillä resonaattori pyrkii aina pysymään nykyisessä moodissa (Sawada ja Sakaba 1980).

Kuvassa 5.17 esitetään siirtymä ensimmäisestä moodista toiseen ja takaisin. Moodisiirtymään liittyy hystereesin lisäksi myös amplitudin muutos, joka on suoraan verrannollinen hystereesin määrään $u_h - u_l$. Hystereesin suuruus ei riipu ilmasuihkun pituudesta, mutta sen on havaittu vähenevän, kun ilmasuihkun keskikohdan poikkeama puhallusaukon särmästä pienenee (Sawada ja Sakaba 1980).



Kuva 5.18 (a) Soiva taajuus ja (b) vastaava suhteellinen puhalluspaine ilmasuihkun nopeuden funktiona. Nopeudella u_l tapahtuu siirtyminen toiseen moodiin ja nopeudella u_h siirtyminen takaisin ensimmäiseen moodiin (Sawada ja Sakaba 1980).

6 HUILUN LASKENNALLINEN MALLINTAMINEN

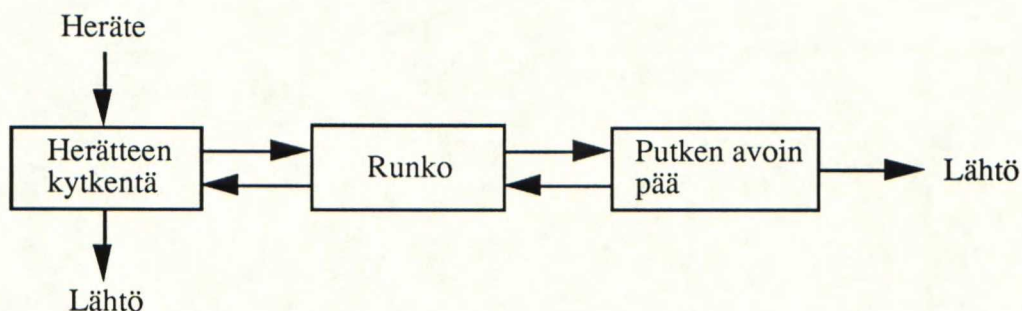
Seuraavaksi esitellään tässä työssä laadittu huilun laskennallinen malli. Työn tavoitteena on ollut laatia äänisynteesiin soveltuva huilun ääntä tuottava algoritmi, jolla olisi selvä yhteys edellä esitettyyn huilun toimintaperiaatteen ja joka olisi mahdollista toteuttaa tosiajassa toimivana ohjelmana nykyaikaisessa kaupallisessa signaaliprosessorissa.

Lähtökohtana ovat olleet viime vuosikymmenien aikana kertynyt tieto huilun akustiikasta ja aaltojohtomallinnuksen periaatteet. Algoritmia laadittaessa pyrittiin aluksi yksinkertaistamaan huilun toimintaperiaatetta. Esimerkiksi sormiaukot jätettiin mallista pois ja sen paremmin avoimia kuin suljettujakaan sormiaukkoja ei mallissa ole eksplisiittisesti kuvattu. Yksinkertaistuksia tehtäessä pyrittiin erityisesti ottamaan huomioon ihmisen kuulon ominaisuudet. Toisin sanoen yritettiin laatia pelkistetty malli, jonka tuottama ääni kuulostaisi mahdollisimman samalta kuin huilu. Lopulta pyrittiin esittämään malli signaalinkäsittelyyn soveltuvana järjestelmänä, joka koostuu pääasiassa viivelinjoista ja lineaarisista suotimista.

6.1 Huilun laskennallinen malli

Mallia varten huilun ajatellaan koostuvan kolmesta toiminnallisesta osasta, jotka ovat:

- runko
- putken avoin pää
- herätteen kytkentä edellisiin

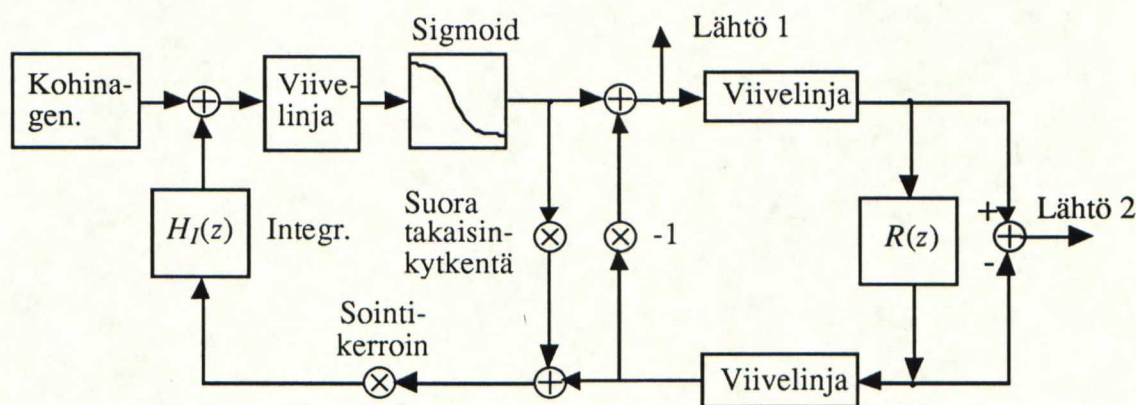


Kuva 6.1 Huilun mallin kolmen toiminnallisen osan kytkeytyminen toisiinsa.

Huilun runko voidaan olettaa lineaariseksi järjestelmäksi. Putken avoimessa päässä tapahtuu sironta, jolloin osa putkessa etenevästä aallosta säteilee putkesta ulos ja osa heijastuu takaisin. Herätteen kytkeytyminen rungossa värähtelevään ilmapatsaaseen on epälineaarinen.

Wawrzynek (1989) on aiemmin esittänyt samantapaisen huilun mallin. Merkittävin ero nyt esitettävään malliin nähden on se, että Wawrzynek on mallintanut huilun rungon rinnakkaisresonaattoripankin avulla. Tässä työssä runko sen sijaan kuvataan digitaalisella aaltojohtolla eli kaksisuuntaisella viivelinjalla. Wawrzynekin putkimalli ei siten ole yhtä läheisessä yhteydessä fysikaaliseen todellisuuteen kuin nyt esiteltävä malli.

Kuvassa 6.2 esitetään kokonaisuudessaan tässä työssä laadittu huilun laskennallinen malli. Mallin varhaisempia versioita on esitelty syksyllä 1991 (Karjalainen *et al.* 1991) ja maaliskuussa 1992 (Välimäki *et al.* 1992a). Järjestelmä on aikadiskreetti ja se voidaan toteuttaa kerto- ja yhteenlaskujen sekä yksikköviive-elinten avulla.



Kuva 6.2 Huilun laskennallisen mallin lohkokaaavio.

Aaltojohtomallin toiminta voidaan täydellisesti kuvata käsittelemällä joko äänipainetai tilavuusnopeusaaltoja (Liljencrantz 1985, Smith 1986). Tässä mallissa etenevä aakdiskreetti signaali kuvaa *akustista tilavuusnopeutta*. Jatkossa esitettävät heijastusfunktiot on siten johdettu tilavuusnopeudelle. Mallinnettavaksi suureeksi on valittu tilavuusnopeus, koska herätteen ja värähtelevän ilmapatsaan takaisinkytkennän oletetaan olevan verrannollinen tilavuusnopeuteen. Jatkossa perustellaan kuvan 6.2 mukaisen huilun mallin eri osien suhdetta fysikaaliseen todellisuuteen.

6.2 Herätteen ja resonaattorin kytkennän malli

6.2.1 Huilun mallin äänentuottomekanismi

Mallin heräte on valkoinen kohina, joka jäljittelee huilun suuaukolla ilmasuihkun ja huuliaukon reunan törmäyksessä syntyvää kohinaa. Kohina on oleellinen osa huilun ääntä. Kohinaa syötetään malliin ennen epälineaarisuutta, jotta syntetoidussa äänessä olisi mukana epälineaarisuuden moduloimia kohinapulsseja. Kohinan generointia käsitellään liitteessä C.1.

Heräte syötetään viivelinjaan, joka kuvaa ilmasuihkussa etenevän poikittaisen aaltolun etenemisviivettä (ks. kappale 5.4.3). Viivelinjan pituus on tyypillisesti sama kuin kahden putkea mallintavan viivelinjan pituudet yhteensä. Ilmasuihkun viivettä mallintavan viivelinjan pituutta säätämällä voidaan saada aikaan *ylipuhallus* eli siirtyminen ylempään moodiin.

Herätteen ja ilmasuihkun välinen epälineaarinen kytkentä esitetään mallissa käyttäen sigmoid-funktiota, joka on tässä tapauksessa seuraavanlainen:

$$f(h) = \tanh(h_0 - h) \quad (6.1)$$

missä h_0 on ilmasuihkun keskiakselin staattinen poikkeama puhallusaukon takareunasta ja h on ilmasuihkun dynaaminen poikkeama. Staattinen poikkeama h_0 vaikuttaa merkittävästi mallin tuottaman äänen spektriin: jos $h_0 = 0$, ovat parilliset harmoniset hyvin vaimeita. Kun parametrin h_0 arvoa suurennetaan, kasvaa parillisten harmonisten amplitudi, sillä mallin tuottama aaltomuoto muuttuu epäsymmetriseksi.

Kuvan 6.2 keskellä sijaitseva risteys mallintaa tilavuusnopeusaallon sirontaa huilun rungon sisällä suuaukon kohdalla. Kerroin, jota kuvassa 6.2 merkitään 'suora takaisin-kytkentä', on itseisarvoltaan pieni luku (< 1).

Sointikerroin kuvaa huilun äänen kohinaisuuden ja soinnillisuuden suhdetta. Sen voidaan tulkita olevan yhteydessä huilistin puhaltaman ilmasuihkun poikkipinta-alaan. Suuri arvo vastaa tällöin kapeaa ilmasuihkua, jolla saavutetaan kirkas ja vähäkohinainen ääni. Pieni arvo tai takaisinkytkennän katkaiseminen (sointikerroin = 0) estää oskillaation syntymisen. Silloin mallin ulostulossa havaitaan kampasuodatettua kohinaa.

Takaisinkytkentäsilmukassa (ks. kuva 6.2) on lisäksi vuotava integraattori (ks. liite B.2), jonka avulla tilavuusnopeussignaalista määritetään tilavuuden poikkeama, joka poikkeuttaa ilmasuihkua. Mallissa on oletettu, että Fletcherin ehdotuksen mukaisesti nimenomaan tilavuuden poikkeama aiheuttaa oskillaation syntymisen huilussa (Fletcher ja Douglas 1980). John Coltman (1992b) on lähiaikoina tutkinut ilmiötä ja todennut, ettei vielä ole täsmällisesti selvitetty onko oletus oikea. Coltman suhtautuu asiaan epäilevästi.

Integraattorin ja herätteenä käytetyn kohinan summaaminen (vasemmassa yläkulmassa kuvassa 6.2) mallintaa ilmasuihkun poikkeutusta. Tämän operaation tuloksena saadaan alipäästösuodatettu kohinainen signaali. Kun tämä signaali viedään pehmeän rajoittimen eli sigmoid-funktion läpi, saadaan matalataajuisen signaalin hetkellisarvosta riippuen joko kohinaista tai kohinatonta signaalia. Näin mallin ääneen syntyy pulssikohinaa, jonka oletetaan olevan kuulon kannalta tärkeä piirre huilun äänessä.

Mallin tuottamaan ääneen voidaan lisätä vibrato kertomalla kohinaherätettä pientaajuisella sinisignaalityyppillä. Tällöin ainoastaan kohinan amplitudi muuttuu periodisesti, mutta epälineaarisuuden ansiosta myös mallin äänen aaltomuodossa alkaa esiintyä muutoksia. Näin saadaan aikaan huilun äänelle tyypillinen sointiväri-vibrato. Siniaallon generointialgoritmi esitetään liitteessä C.2.

6.2.2 Signaalin vakiokomponentin poistaminen

Sigmoid-funktion yhteydessä signaaliin saattaa muodostua voimakas vakiokomponentti, joka häiritsee epälineaarisuuden haluttua toimintaa jatkossa. Syynä on se, että sigmoid-funktio tuottaisi suurella vakioarvolla ainoastaan toista ääriarvoaan eli myöskin vain dc-komponenttia¹. Siksi epälineaarisuuden ulostulo viedään ylipäästösuotimeen, joka poistaa vakiokomponentin. Samantyyppistä suodinta ovat joutuneet käyttämään myös muut epälineaaristen aaltojohtomallien laatijat (Sullivan 1990, Coltman 1992a).

Signaalin vakiokomponentti on helppo poistaa ensimmäisen asteen IIR-suotimella, jonka nolla on z -tason pisteessä $z = 1$, eli taajuudella 0 Hz ja jonka napa sijaitsee z -tason reaaliakselilla pisteen $z = 1$ läheisyydessä kompensoiden nollakohdan vaikutuksen taajuusvasteeseen suurilla taajuuksilla. Suotimen siirtofunktio on tällöin:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - a_1 z^{-1}} \quad (6.2)$$

missä ainoan suodinkertoimen arvoksi on valittu $a_1 = 0,995$. Tällöin suotimen amplitudivasteen -3 dB:n piste on noin 35 Hz:n kohdalla ja vaste on suuremmilla taajuuksilla tasainen sekä vahvistus 1.

6.3 Huilun rungon mallintaminen

Kuvan 6.2 oikea puoli esittää huilun rungon aaltojohtomallin, joka on laadittu luvussa 4 esitettyjen periaatteiden mukaisesti. Putken avoimessa päässä tapahtuva sironta esitetään heijastusfunktiolla $R(z)$. Mallin ulostulo lasketaan putken päästä (lähtö 2 kuvassa 6.2) ja suuaukon kohdalta (lähtö 1) saatavien signaalien painotettuna summana. Seuraavassa käsitellään akustisen putken aaltojohtomallia erityisesti huilun kannalta.

6.3.1 Rungon aaltojohtomalliin sisältyvät fysikaaliset oletukset

Akustisen putken aaltojohtomallinnukseen liittyy kaksi fysikaalista oletusta:

- 1) *linearisoitu aaltoyhtälö* on voimassa ja
- 2) putkessa etenee ainoastaan akselin suuntainen *tasoaalto*.

Ensimmäiseen oletukseen liittyen äänipaineen toivotaan pysyvän kaikkialla putkessa alle 160 desibelin. Tämä oletus pätee jopa trumpetille, jonka suukappaleessa äänipaine on huomattavasti korkeampi kuin huilussa (Fletcher ja Rossing 1991). Siten voidaan turvallisesti väittää, että linearisoitu aaltoyhtälö pätee huilun tapauksessa.

Tasoaalto-oletus vaatii lähempää tarkastelua. Pienillä taajuuksilla putkessa etenee vain tasoaalto eli moodi (0,0). Ensimmäinen ylempi moodi on antisymmetrinen moodi (1,0), jonka rajataajuus saadaan seuraavasta yhtälöstä (Fletcher ja Rossing 1991):

$$f_c = 1,84 \frac{c}{2\pi a} \quad (6.3)$$

¹ Tasavirta (engl. direct current, dc)

missä $c = 350$ m/s on äänen nopeus ja a on putken säde. Huilun rungon säde on 9,5 mm, jolloin yhtälöstä (6.3) saadaan rajataajuudeksi $f_c = 10800$ Hz. Näin saatu ylärajataajuus tasoaaltomallille on kuitenkin hieman liian korkea, sillä suljetut sormiaukot vaikuttavat sekä äänen etenemisnopeuteen että putken efektiiviseen poikkipinta-alaan: äänen nopeus on käytännössä alhaisempi kuin yllä oletettiin ja lisäksi huilun rungon säde on suurempi (Benade 1960). Näiden korjausten seurauksena saataisiin pienempi rajataajuus kuin yllä. Tasoaalto-oletuksen voitaneen silti olettaa pätevän noin 10 kHz:iin asti.

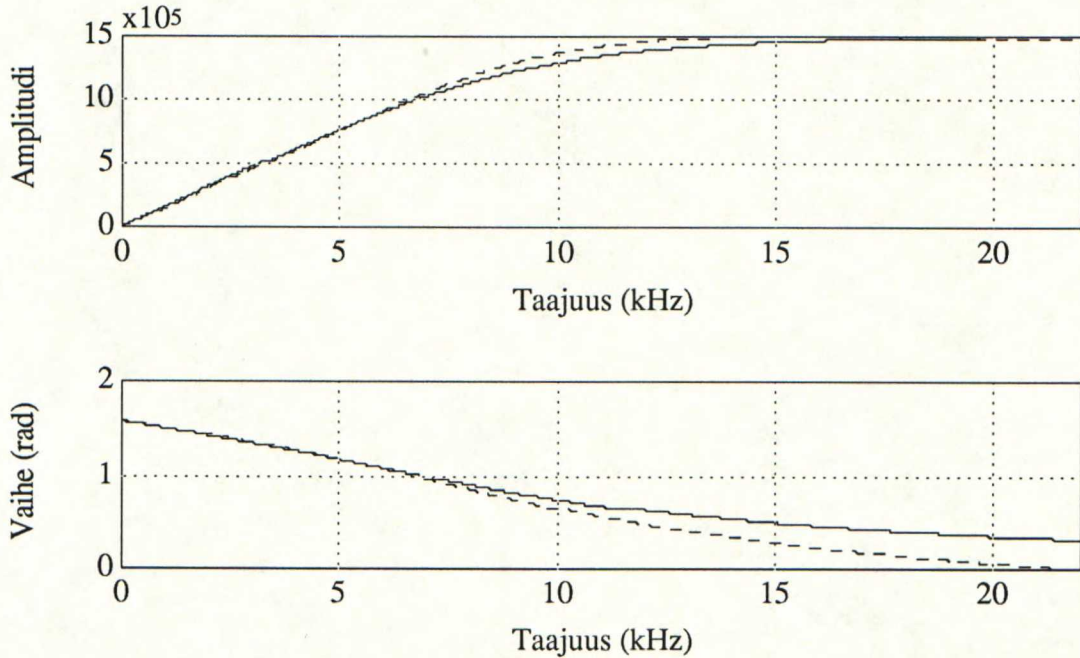
6.3.2 Putken avoimen pään säteilyimpedanssin mallintaminen

Putken avoimen pään säteilyimpedanssi voidaan muuttaa digitaalisuotimeksi kappaleessa 4.2.3 esitellyllä *bilineaarimuunnoksella*. Tällöin säteilyimpedanssin Laplace-muunnokseen $Z_r(s)$ (5.34) tehdään seuraava sijoitus (4.28):

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \quad (6.4)$$

missä T on valittu näyteväli. Bilineaarimuunnoksen yhteydessä voidaan vaatia, että kuvauksen yhteydessä jokin taajuusvasteen piste kuvautuu vastaavalle taajuudelle z -alueessa. Kun $T = 22,7 \mu\text{s} = 1/44100$ s ja vaaditaan, että taajuusvasteen arvo säilyy 5,0 kHz:n kohdalla muuttumattomana, saadaan tuloksena toisen asteen z -siirtofunktio, joka on Tsebysev-skaalattuna² seuraavanlainen:

$$z_r(z) = \frac{0,6313 - 0,7206z^{-1} + 0,08929z^{-2}}{1 - 0,3390z^{-1} + 0,1180z^{-2}} \quad (6.4)$$



Kuva 6.3 Beranekin (1954) säteilyimpedanssin ja sen bilineaarimuunnoksen (katkoviiva) amplitudivaste (yllä) sekä vaihevaste (alla).

² Tsebysev-skaalauksessa jaetaan osoittajapolynomi amplitudivasteen suurimmalla arvolla.

Beranekin mallin avulla määritetyn säteilyimpedanssin (ks. kappale 5.5.3) ja sen bilineaarimuunnoksen vertailu on esitetty kuvassa 6.3. Tässä tapauksessa taajuusvasteen on vaadittu säilyvän muuttumattomana taajuudella 5,0 kHz.

Beranekin mallin perusteella lasketun säteilyimpedanssin ja sen bilineaarimuunnoksen amplitudi- ja vaihevaste ovat huomattavan identtiset pienillä taajuuksilla, mutta noin 5 kHz:n yläpuolella virhe on merkittävä. Lisäksi voidaan kritisoida menetelmää, jolla säteilyimpedanssin diskreettiaikainen approksimaatio on saatu: ensin on käytetty analogista approksimaatiota, jonka virhettä ei tarkasti tiedetä. Sitä on approksimoitu bilineaarimuunnoksella, joka vääristää funktion taajuuskäyttäytymistä suurilla taajuuksilla. Puhdasoppisempi menetelmä olisi ratkaista säteilyimpedanssi aaltoyhtälön avulla ja suorittaa approksimointi kokonaisuudessaan z -alueessa. Silloin tiedettäisiin mahdollisimman tarkasti, kuinka suuria virheitä approksimaatiossa esiintyy ja millä taajuuksilla. Aaltoyhtälön täsmällinen ratkaisu olisi valitettavasti erittäin hankalaa ja siksi nyt on tyydytty Beranekin esittämään approksimaatioon.

6.3.3 Putken avoimen pään laskennallinen malli

Edellä esitettiin kuinka putken avoimen pään säteilyimpedanssia voidaan approksimoida digitaalisuotimella. Laskennallista mallintamista ajatellen tarvitaan kuitenkin heijastusfunktiota $R(z)$ mallintava digitaalisuodin, jonka avulla voidaan määrittää aaltojohdon päästä heijastuva ja säteilevä signaali (vrt. kappale 4.4.3). Yhtälöllä (4.59) määritelty heijastusfunktio $R(\omega)$ voidaan esittää normalisoidun säteilyimpedanssin $z_r(\omega)$ avulla seuraavasti:

$$R(\omega) = \frac{\frac{Z_r(\omega)}{Z_0} - 1}{\frac{Z_r(\omega)}{Z_0} + 1} = \frac{z_r(\omega) - 1}{z_r(\omega) + 1} \quad (6.6)$$

Heijastusfunktio voidaan vastaavasti esittää myös z -alueessa:

$$R(z) = \frac{z_r(z) - 1}{z_r(z) + 1} \quad (6.7)$$

Heijastusfunktion digitaalisuodinapproksimaatio voidaan laatia sijoittamalla Beranekin antaman säteilyimpedanssin bilineaarimuunnos (6.5) yhtälöön (6.7). Tällöin saadaan seuraava toisen asteen digitaalisuotimen siirtofunktio:

$$R(z) = \frac{-0,2260 - 0,2339z^{-1} + 0,01758z^{-2}}{1 - 0,6495z^{-1} + 0,1271z^{-2}} \quad (6.8)$$

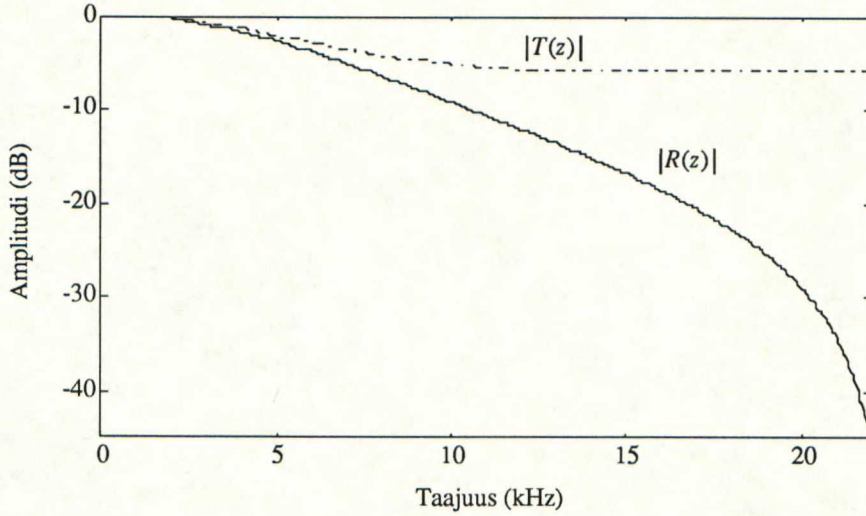
Putken päästä ulos säteilevän tilavuusnopeuden siirtofunktio eli läpäisyfunktio $T(z)$ on määritelty yhtälön (4.60) avulla:

$$T(z) = 1 - R(z) \quad (6.9)$$

Sijoittamalla siirtofunktio $R(z)$ (6.7) läpäisyfunktion yhtälöön (6.9) saadaan:

$$T(z) = \frac{1,226 - 0,4156z^{-1} + 0,1446z^{-2}}{1 - 0,6495z^{-1} + 0,1271z^{-2}} \quad (6.10)$$

Laskennallisessa mallissa (kuva 6.2) suotimet $R(z)$ ja $T(z)$ on toteutettu kuvassa 4.12 esitetyllä tavalla, jolloin tarvitaan vain yksi toisen asteen suodin $R(z)$. Läpäisyfunktio $T(z)$ toteutetaan kytkemällä signaali suoraan heijastusfunktion $R(z)$ ohi.



Kuva 6.4 Putken avoimen pään heijastusfunktion $R(z)$ ja läpäisyfunktion $T(z)$ amplitudivaste.

Kuvassa 6.4 esitetään sekä heijastus- että läpäisyfunktiota approksimoivan suotimen amplitudivaste. Heijastusfunktio $R(z)$ on kuvan mukaisesti alipäästösuodin, joka päästää tilavuusnopeusaallon pientaajuiset komponentit heijastumaan takaisin putkeen. $R(z)$ kääntää lisäksi tilavuusnopeussignaalin vaihetta 180° , kuten putken avoimessa päässä tuleekin tapahtua. Läpäisyfunktion $T(z)$ amplitudivaste saturoituu suurilla taajuuksilla -6 dB:n tasolle. Syynä on se, että $T(z)$ on määritelty $R(z)$:n avulla yhtälössä (6.9) ja pienillä taajuuksilla $R(z)$:n vahvistus on noin -1 lähestyen nollaa taajuuden kasvaessa. Siksi läpäisyfunktion $T(z)$ vahvistus pienillä taajuuksilla on noin 2 ja lähestyttäessä Nyquist-taajuutta vahvistus lähenee yhtä.

Putken päästä ulos säteilevä signaali eli suotimen $T(z)$ ulostulo edustaa tilavuusnopeutta. Mallista saadaan kuultava ääni muuntamalla tilavuusnopeussignaali kaukokentässä havaittavaksi äänipaineeksi. Muunnos voidaan tehdä yhtälön (4.61) mukaisesti, jolloin tilavuusnopeussignaali derivoidaan ajan suhteen. Laskennallisessa mallissa derivointioperaatiota approksimoidaan peräkkäisten näytteiden erotuksella. Tällaista digitaalisuodinta kutsutaan digitaaliseksi differentiaattoriksi ja sen siirtofunktio on z-tasossa:

$$H(z) = 1 - z^{-1} \quad (6.11)$$

Asiaa on käsitelty tarkemmin liitteessä B.1. Derivointi vastaa ensimmäisen asteen yli-
päästösuodatusta (6 dB/oktaavi). Siten huilumallista säteilevä signaali on viivelinjassa etenevän signaalin yli-
päästösuodatettu versio, vaikka $T(z)$:n amplitudivaste (kuva 6.4)

viittaakin loivaan alipäästösuodatukseen.

6.3.4 Laineen yksinkertaistettu säteilyimpedanssimalli

Unto Laine on näyttänyt, että diskreetti aikaista laskentaa varten putken avoimen pää normalisoitua säteilyimpedanssia voidaan approksimoida *differentiaattorilla* (Laine 1982). Tämä on yksinkertaisin ensimmäisen asteen approksimaatio kyseiselle impedanssille.

Laine (1982) on lisäksi todennut, että approksimaatiossa on erityisesti kiinnitettävä huomiota säteilyimpedanssin reaaliosaan, sillä se vaikuttaa koko putken resonanssien kaistanleveyksiin. Kaistanleveydet puolestaan määräävät soivan äänen kunkin harmonisen amplitudin, sillä äänen harmonisten taajuudet eivät ole samat kuin putken resonanssien keskitaajuudet, vaan poikkeavat niistä hiukan. Syynä on moodilukittuminen (ks. kappale 2.1.2.)

Differentiaattorin siirtofunktiota painotetaan reaalilla kertoimella c siten, että saadun approksimaation virhe on nolla tietyllä taajuudella:

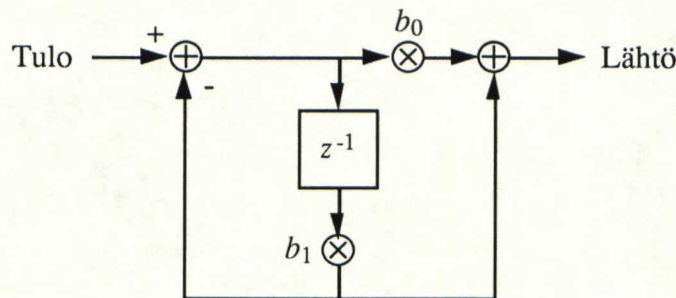
$$z_r(z) = c(1 - z^{-1}) \quad (6.12)$$

Approksimaatio sovituu avoimen aukon säteilyimpedanssiin aina täydellisesti taajuudella 0 Hz. Painokerrointa c säätämällä approksimaatiovirhe saadaan nolaksi myös jollakin toisella taajuudella.

Heijastusfunktiota approksimoiva digitaalisuodin voidaan johtaa sijoittamalla yhtälö (6.12) heijastusfunktion $R(z)$ yhtälöön (6.7) normalisoidun säteilyimpedanssin $z_r(z)$ paikalle. Approksimaatio on z -alueessa seuraavanlainen:

$$R(z) = \frac{c - cz^{-1} - 1}{c - cz^{-1} + 1} = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + b_1 z^{-1}} \quad (6.13)$$

missä $b_0 = \frac{c-1}{c+1}$ ja $b_1 = -\frac{c}{c+1}$.



Kuva 6.5 Putken avoimen pää heijastusfunktiota $R(\omega)$ mallintava IIR-suodin $R(z)$, joka saadaan, kun putken avoimen pää säteilyimpedanssia approksimoidaan differentiaattorilla Unto Laineen ehdotuksen mukaan (Laine 1982).

Kuva 6.5 esittää heijastusfunktioita $R(\omega)$ approksimoivan IIR-suotimen $R(z)$ suora muoto II -toteutuksen. Suodin on ensimmäisen asteen IIR-suodin, jonka laskenta on tavallista tehokkaampaa, koska takaisinkytkennän ja myötäkytkennän painokerroin on sama b_1 . Lisäksi on merkittävää, että suotimen kertoimet b_0 ja b_1 riippuvat ainoastaan painokertoimesta c .

6.3.5 Putken seinämien häviöiden mallintaminen

Putken seinämien lähellä sijaitsevassa rajakerroksessa tapahtuu viskoottisia ja lämmönjohtumisesta aiheutuvia häviöitä, joiden vaikutusta voidaan approksimoida digitaalisella alipäästösuotimella. Häviöiden täsmällinen mallintaminen on vaikeaa, sillä vaimennus on verrannollinen taajuuden neliöjuureen (ks. kappale 5.6.2). Toistaiseksi häviöt mallinnetaan ensimmäisen asteen IIR-suotimella, josta puuttuu viivästetty myötäkytkentä. Samanlaista menettelyä on sovellettu aiemmin ihmisen ääniväylää mallinnettaessa (Laine 1984). Suodinta on analysoitu liitteessä B.3.

6.4 Sormiaukkojen mallintaminen

Tässä työssä esiteltävään huilun laskennalliseen malliin ei ole sisällytetty mallia jokaisesta sormiaukosta, koska sormiaukkoja on liian monta niiden yksityiskohtaista kuvausta ajatellen. Suljettujen ja varsinkin avointen sormiaukkojen vaikutus on kuitenkin otettava mallissa huomioon. Seuraavassa esitetään, kuinka vain muutaman sormiaukon mallintamisella voidaan saavuttaa lähes sama lopputulos kuin kaikkien aukkojen yksityiskohtaisella kuvaamisella.

6.4.1 Suljetut sormiaukot

Suljettuja sormiaukkoja sisältävä rungon osa voitaisiin Benaden (1960) ehdotuksen mukaisesti mallintaa paksunnetulla ja pidennetyllä putkella. Malli olisi laskennallisesti varsin tehokas, sillä kuten edellä on esitetty, vain putken poikkipinta-alassa tapahtuvat muutokset täytyy mallintaa. Tällöin voitaisiin käyttää Kelly-Lochbaum -risteyksiä mallintamaan paksunnoksen kumpaakin päätä. Kappaleessa 4.5.4 esitetyllä tavalla voitaisiin risteyskohdat käytännössä sijoittaa myös viivelinjan näytepisteiden välille, jolloin mallin tarkkuus paranisi.

Nyt esiteltävään malliin ei ole toistaiseksi sisällytetty suljettujen aukkojen vaikutusta, koska myöskään kaikkia muita huilun rungon piirteitä, kuten putken seinämien rajakerroksessa tapahtuvia energiahäviöitä ei ole täsmällisesti mallinnettu. Suljetut aukot alipäästösuodattavat putkessa etenevää tilavuusnopeussignaalia, joten periaatteessa niiden vaikutus voitaisiin sisällyttää aaltojohtomallissa olevaan yksinkertaiseen alipäästösuotimeen. Toistaiseksi suljettujen aukkojen aiheuttama siirtofunktio ei ole tarkasti tiedossa, joten tällaista järjestelyä ei ole kokeiltu.

6.4.2 Avoimet sormiaukot ja mallin virittäminen

Avoimia sormiaukkoja olisi mallinnettava selvästi monimutkaisemmalla tavalla. Koska tilavuusnopeus etenee avoimen aukon kohdalta myös ympäristöön, olisi sormiaukot esitettävä kolmiportin avulla. Kyseisen kolmiportin laskennallinen malli on esitetty kappaleessa 4.4.4. Avoimen sormiaukon malli ei olisi laskennallisesti aivan vaivaton, sillä sormiaukon säteilyimpedanssi on kompleksinen ja sitä olisi approksimoitava digitaalisella suotimella.

Tärkeintä olisi liittää huilun malliin rekisteriläppä, jolla voitaisiin vaimentaa putken perustaajuutta ja helpottaa ylipuhallusta. Moodin vaihtaminen on toki mahdollista ilman rekisteriaukkoakin, mutta huilun äänen sointiväri on huomattavasti kirkkaampi kun rekisteriläppä avataan moodisiirtymän yhteydessä. Rekisteriläpän lisäksi pitäisi periaatteessa mallintaa kahta ensimmäistä avointa aukkoa. Avointen sormiaukkojen vaikutus voitaisiin sisällyttää huilumalliin varsin täydellisesti, kun mallinnettaisiin yhteensä kolmea avointa aukkoa kerrallaan.

Avointen aukkojen tärkein merkitys huilussa on se, että ne lyhentävät huilun rungossa värähtelevän ilmapatsaan pituutta, jolloin perustaajuus suurenee. Mallissa ilmiötä jäljitellään muuttamalla kaksisuuntaisen viivelinjan pituutta. Viivelinjojen pituuden täsmälliseen määrittämiseen käytetään nelipisteistä eli kolmannen asteen Lagrange-interpolaattoria.

Mallin soittaminen vireessä tällä tavoin ei ole triviaalia, sillä esimerkiksi heijastusfunktio $R(z)$ aiheuttaa alipäästösuodatuksen lisäksi taajuusriippuvan viipeen, jota voidaan tutkia suotimen vaiheviipeen avulla. Käytännössä eri säveliä vastaava viivelinjan pituus on kokeiltava. Kutakin äänenkorkeutta vastaavat parametrien arvot – viivelinjojen pituus ja murtoviipeen arvo interpolaattorille – voidaan tämän jälkeen tallettaa taulukkoon.

6.5 Mallin soveltaminen muihin puhallinsoittimiin

Edellä kuvattu laskennallinen malli soveltuu pienin modifikaatioin myös muiden puhallinsoittimien mallintamiseen. Rungon aaltojohtomallilla voidaan periaatteessa simuloida mitä tahansa yksiulotteista resonaattoria muuttamalla ainoastaan mallin parametreja. Aaltojohdon päiden heijastusfunktiot on luonnollisesti määritettävä jokaiselle resonaattorille erikseen. Lisäksi seinämien häviöitä mallintavan suotimen kertoimia on muutettava putken läpimitan muuttuessa.

6.5.1 Muut huilusoittimet

Kaikki huilusoittimet, kuten nokkahuilu, panhuilu ja urkupilli, ovat toimintaperiaatteeltaan identtisiä poikkihuilun kanssa. Nokkahuilu (engl. recorder), johon puhalletaan putken päästä eikä sivusta kuten poikkihuilussa, saadaan aikaan muuttamalla joitakin huilumallin parametreja. Ilmasuihku osuu nokkahuilun suuaukon reunaan symmetrisesti,

joten ilmasuihkun poikkeutuksen on oltava nolla (Lyons 1981). Tästä johtuen nokkahuilun äänessä esiintyy lähes pelkästään parittomia harmonisia. Lisäksi heijastusfunktio on laskettava uudestaan ottaen huomioon nokkahuilun putken paksuus.

Merkittävin ero nokkahuilun ja poikkihuilun välillä on se, että nokkahuilun runko on *kartiomainen* siten, että se kapenee kohti putken loppupäätä. Smith (1991b) on näyttänyt, että kartiomaista putkea voidaan mallintaa tekemällä pieni muutos homogeeniseen aaltojohtomalliin: kartiomainen putki voidaan esittää kaksisuuntaisella viivelinjalla, kun ulos otettava signaali jaetaan kartiomaisten osuuden pituudella.

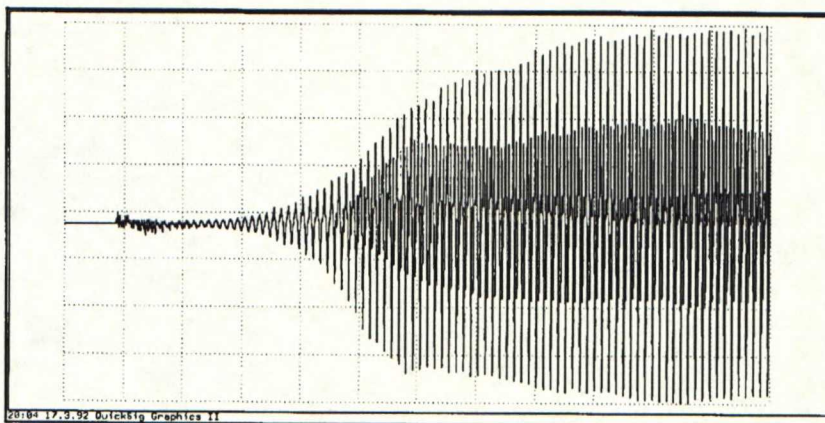
6.5.2 Muut puupuhaltimet

Huilua mallinnettaessa kehitettyä lähestymistapaa on sovellettu myös klarinetin mallintamiseen (Välimäki *et al.* 1992b). Puupuhaltimien runko on periaatteessa aina samanlainen, joten myös huilun ja klarinetin mallin oleellinen ero on herätteen ja resonaattoriputken erilainen epälineaarinen kytkentä. Klarinetissa äänen syntyyn vaikuttaa värähtelevä kieli, kun taas huilussa ääni syntyy aaltoilevan ilmasuihkun ansiosta. Tämä on perustavanlaatuisen ero ja siksi herätteen malleilla ei ole juuri mitään tekemistä toistensa kanssa. Klarinetin ja saksofonin mallintamisen suhde on likimain sama kuin huilun ja nokkahuilun, sillä äänentuottomekanismi on sama ja keskeinen ero on putken kartiomaisuus.

Kaksoisruokosoittimien, kuten oboen ja fagotin mallintaminen vaikuttaa hankalalta, sillä kaksoisruo'on toimintaa ei toistaiseksi ole täsmällisesti selvitetty (Hirschman 1991). Tosin on huomattava, ettei myöskään huilun toimintaperiaatteesta tarkkaan ottaen olla yksimielisiä. Silti voidaan laatia parhaan käsityksen mukainen malli, josta saataan oppia jotain soittimen toimintamekanismista.

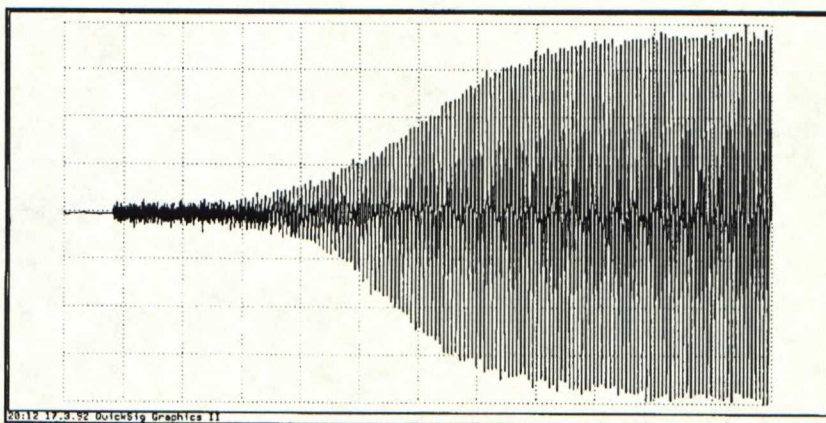
6.6 Huilun ja mallin vertailu

Kuvassa 6.6 esitetään huilun äänen aaltomuoto noin 100 millisekunnin ajalta. Kuvasta havaitaan amplitudin luonteenomainen eksponentiaalinen nousu. Lisäksi voidaan havaita amplitudissa satunnaista vaihtelua, joka johtuu paineen vaihtelusta soittajan suussa. Äänen alussa näkyy lyhyt kohinapurske, jonka kuuloaisti havaitsee vaimeana tuhahdukseksi.



Kuva 6.6 Huilun äänen aluke noin sadan millisekunnin ajalta.

Kuvassa 6.7 esitetään vertailun vuoksi edellä esitetyllä mallilla syntetoitu huilun ääni. Myös tämän signaalin kesto on noin sata millisekuntia. Vertailu kuvaan 6.6 osoittaa etteivät perustajaajuudet ole samat. Silti voidaan havaita joitakin yleisiä eroja ja yhtäläisyyksiä signaalien välillä. Kuvan 6.7 synteettisen signaalin amplitudi nousee eksponentiaalisesti, mutta siinä ei havaita yhtä paljon satunnaista vaihtelua kuin oikean huilun äänessä. Signaalin alussa on havaittavissa runsaammin kohinaa kuin edellä kuvassa 6.6.

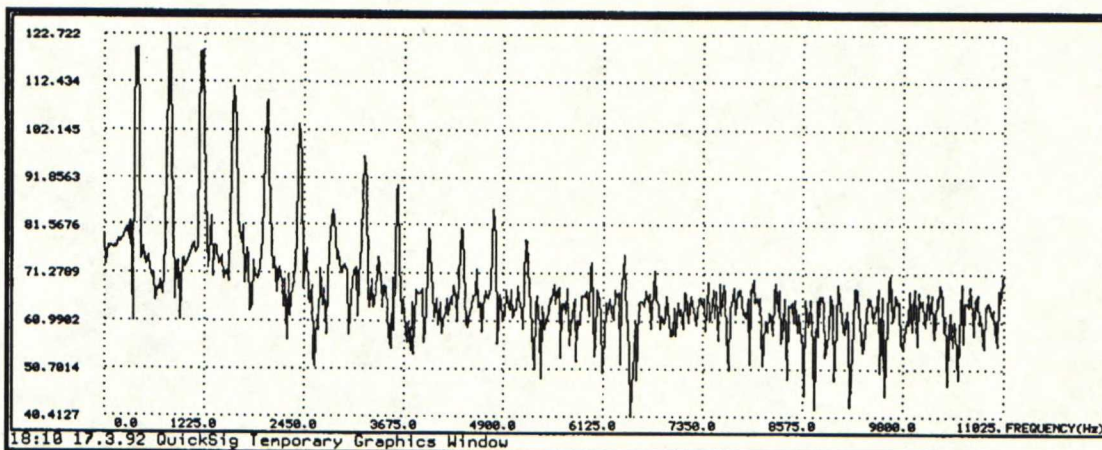


Kuva 6.7 Syntetoidun äänen aluke noin sadan millisekunnin ajalta.

Synteettisen huilun äänen aaltomuodossa havaitut erot voidaan korjata suhteellisen helposti. Mallia ohjaavan kohinageneraattorin amplitudiin voidaan lisätä alipäästösuo-datettua kohinaa, joka aiheuttaa verhoikäyrään satunnaista vaihtelua, jota nähtiin kuvas-sa 6.6. Synteettisen signaalin kohinaisuutta on mahdollista säätää muuttamalla huilun mallin (kuva 6.2) parametriä sointikerroin. Kokeilemalla voidaan etsiä parametrille so-pivin arvo.

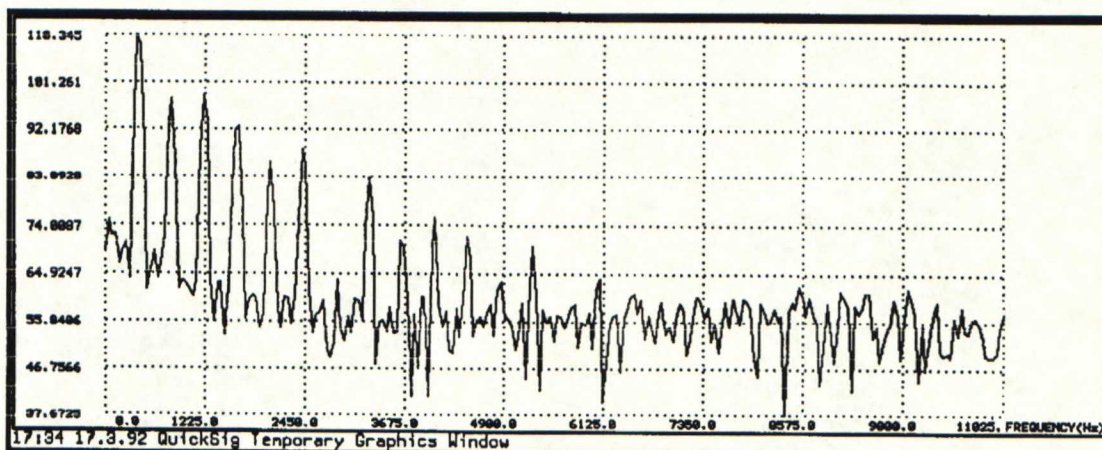
Kuvassa 6.8 esitetään huilun äänen amplitudispektri, josta voidaan havaita huilun äänelle tyypillisiä piirteitä: toinen harmoninen on suhteellisen voimakas, jopa voimak-kaampi kuin ensimmäinen ja spektri laskee taajuuden funktiona siten, että alle 20 har-monista on erotettavissa. Lisäksi spektrissä on kohinaa, jonka amplitudi on keskimäärin

noin 60 desibeliä pienempi kuin voimakkaimman harmonisen.



Kuva 6.8 Huilun äänen amplitudispektri desibeliasteikolla.

Kuvassa 6.9 esitetään laskennallisella mallilla tuotetun huilun äänen amplitudispektri. Merkittävin ero huilun spektriin nähden on alimpien ylä-äänesten amplitudien matalampi taso. Laskennallisella mallilla ei toistaiseksi ole voitu saada toista harmonista ensimmäistä voimakkaammaksi, sillä malli siirtyy helposti ylempään moodiin, jolloin ensimmäinen harmoninen sammuu.



Kuva 6.9 Syntetoidun huilun äänen amplitudispektri desibeliasteikolla.

Huilun malli muistuttaa toimintaperiaatteeltaan varsin läheisesti oikeaa huilua, mutta silti luonnolliselta kuulostavan äänen tuottaminen ei ole helppoa. Keskeinen ongelma on parametrien suurehko määrä: mallin äänensävyyn voidaan vaikuttaa muuttamalla suotimen $R(z)$ parametrejä, sointikerrointa, suoran takaisinkytkennän kerrointa, ilma-suihkun viivettä mallintavan viivelinjan pituutta sekä sigmoid-funktion vahvistusta. Useimpien parametrien arvossa tapahtuvan muutoksen vaikutus tuotettuun signaaliin ei ole yksiselitteinen.

7 MALLIN TOTEUTUS

Tässä työssä laadittu huilun laskennallinen malli on suunniteltu siten, että se soveltuu toteutettavaksi ohjelmallisesti signaaliprosessorilla. Malli on toteutettu käyttäen Texas Instrumentsin TMS320C30-signaaliprosessoria, joka on liitetty Teknillisen korkeakoulun akustiikan laboratoriossa kehitettyyn ohjelmointiympäristöön. Seuraavassa esitellään signaaliprosessori, ohjelmointiympäristö sekä mallin esittäminen oliopohjaisella ohjelmointikielellä.

7.1 Signaaliprosessorit

Signaaliprosessori on mikroprosessori, joka on suunniteltu erityisesti signaalinkäsittelyssä tarvittavien menetelmien reaaliaikaiseen tai mahdollisimman tehokkaaseen suorittamiseen. Signaaliprosessorien erityispiirteitä tavallisiin mikroprosessoreihin verrattuna ovat:

- kertojan toteutus laitteistotasolla, jolloin kertolasku voidaan suorittaa yhdessä käskyjaksossa, kuten muutkin käskyt,
- kerto- ja yhteenlaskun rinnakkainen toteutus, jolla saavutetaan huomattava etu tyypillisissä signaalinkäsittelyoperaatioissa, kuten konvoluution ja korrelaation laskennassa,
- rengasosoitusmuoto (engl. circular addressing), jonka avulla voidaan automaattisesti määritellä ympyrämainen muistialue eli rengaspuskuri (modulopuskuri) ja
- ohjelman suoritus liukuhihnatekniikalla, mikä tarkoittaa että prosessorilla on jatkuvasti kesken useita käskyjä. Tyypillisesti käsky suoritetaan kolmessa tai neljässä liukuhinnan vaiheessa.

Signaaliprosessorit jaetaan kokonaisluku- ja liukulukuprosessoreihin. Kokonaislukuprosessorien (engl. fixed-point processor) käskyjakso on perinteisesti ollut lyhyempi kuin liukulukuprosessorien, mutta nykyään nopeimpien signaaliprosessorien joukossa on sekä liuku- että kokonaislukuaritmetiikkaa käyttäviä prosessoreita. Kokonaislukuilla ohjelmointi on yleensä monimutkaisempaa kuin liukuluvuilla, sillä ohjelmoijan on itse huolehdittava laskennan välitulosten skaalauksesta yli- ja alivuotojen välttämiseksi ja dynamiikan maksimoimiseksi. Liukuluvut skaalautuvat automaattisesti. Edullisen hintansa vuoksi kokonaislukuprosessoreita käytetään kaupallisissa sovelluksissa huomattavasti

enemmän kuin liukulukuprosessoreita. Hintaero on tyypillisesti monikertainen ja johtuu siitä, että liukulukuaritmetiikan tehokas toteutus vaatii kalliita erikoisratkaisuja suuren nopeuden saavuttamiseksi.

7.1.1 TMS320C30-signaaliprosessori

Texas Instrumentsin TMS320C30 on kolmannen sukupolven signaaliprosessori (Texas Instruments 1990) ja Texas Instrumentsin ensimmäinen liukulukuaritmetiikkaa käyttävä prosessori. Sen käskyjakso on 60 ns. Prosessori pystyy periaatteessa suorittamaan 33 miljoonaa liukulukuoperaatioita sekunnissa (33 MFLOPS), mutta tällöin suoritettava ohjelma saa sisältää pelkästään rinnakkaiskäskyjä ja dataa voidaan lukea ainoastaan prosessorin sisäisestä muistista. Käytännössä C30:n teho on lähempänä 16,7 MFLOPS:ia, mikä vastaa tavallisilla (ei-rinnakkaisilla) käskyillä laadittua ohjelmaa. Laskenta kokonaisluvulla on yhtä nopeaa kuin liukuluvuilla.

C30 on 32-bittinen liukulukuprosessori, jossa mantissan osuus on 24 bittiä ja eksponentin 8. Prosessorissa on 8 40-bittistä rekisteriä, joihin laskennan lopputulokset realisoituvat. Laskentatarkkuus on äänenkäsittelyä ajatellen yleensä riittävän hyvä. Ongelmia syntyy lähinnä erittäin voimakkaita resonansseja sisältävien IIR-suotimien yhteydessä.

7.2 QuickC30-signaalinkäsittelyjärjestelmä

Teknillisen korkeakoulun akustiikan laboratoriossa on useiden vuosien ajan kehitetty professori Matti Karjalaisen johdolla oliopohjaista signaalinkäsittelyohjelmointiympäristöä, jolle on annettu nimi QuickSig (Karjalainen et al. 1988, Karjalainen 1990). Järjestelmä on laadittu käyttäen Lisp-kieltä (Steele 1992) sekä CLOS:ia (engl. Common Lisp Object System), joka on Lispin oliopohjainen laajennus (Keene 1989). QuickSig voidaan ajatella Lispin ja CLOSin laajennukseksi, joka tarjoaa työkalut signaalinkäsittelyohjelmointiin. Myöhemmin ohjelmistoon on liitetty mahdollisuus ohjelmoida myös signaaliprosessoreita Lisp-ohjelmasta käsin (Karjalainen 1989).

QuickC30 on QuickSig-ohjelmiston osa, jolla voidaan laatia oliopohjaisia ohjelmia Texas Instrumentsin TMS320C30-signaaliprosessorille. QuickC30-ohjelmointiympäristö toimii nykyisin Apple Macintosh -tietokoneissa, joihin on liitetty C30-signaaliprosessori. Ohjelmankehitystyötä on pyritty helpottamaan integroimalla C30:n assembler Lispiin. Tuloksena on "Lisp-assembler", jonka käskykanta on lähes samanlainen kuin alkuperäisen assemblerin. Koska koodin notaatio noudattaa Lispin syntaksia, voidaan assemblykielisiä ohjelmia liittää Lisp-ohjelmiin. Lisäksi ohjelmointi on Lispin tapaan vuorovaikutteista: assemblyohjelmia tai yksittäisiä käskyjä voidaan ajaa editorista käsin tulkin avulla.

QuickC30 yhdistää matalan ja korkean tason ohjelmoinnin siten, että tietorakenteet laaditaan korkealla tasolla käyttäen olio-ohjelmoinnin periaatteita kun taas laskennan suoritavat funktiot kirjoitetaan C30-prosessorin assemblykielellä. Tuloksena on ohjelmointiympäristö, jossa signaalinkäsittelyalgoritmien laatiminen on suhteellisen helppoa Lisp-kielen ansiosta ja toisaalta ohjelmat ovat mahdollisimman nopeita, koska funktiot on laa-

dittu prosessorin konekielellä.

7.2.1 Oliopohjainen ohjelmointi

Oliopohjaisessa ohjelmoinnissa (engl. Object-Oriented Programming, OOP) määritellään tietotyypit *olioluokkina* (engl. class), jotka ovat kehittyneitä tietorakenteita. Olio-ohjelmoinnissa muuttujat ovat eri luokkien ilmentymiä eli *instansseja* (engl. instance). Ohjelmien toiminnallinen osa koostuu *metodeista* (engl. method) eli tietylle olioluokalle määritellyistä funktioista.

Olio-ohjelmoinnissa keskeisessä osassa ovat *geneeriset funktiot*. Ne ovat keskenään samannimisiä, mutta eri olioluokille määriteltäviä funktioita. Esimerkki geneerisestä funktiosta voi olla kertolasku, josta laaditaan versio sekä skalaari- että matriisityyppisiä olioita varten. Funktiot voivat olla kumpikin nimeltään 'kertolasku', mutta toinen on kohdistettava luokalle 'skalaari' ja toinen luokalle 'matriisi'. Geneerisen funktion käsite tukee täydellisesti koodin uudelleenkäyttöä, sillä funktioiden nimeämisessä syntyvät konfliktit eivät aiheuta ongelmia.

Olio-ohjelmoinnin tärkein piirre on *perintä* (engl. inheritance), jonka avulla on mahdollista määritellä hierarkkisia suhteita erilaisten olioluokkien kesken. Perintä merkitsee yhteisten piirteiden ja käyttäytymisen jakamista eri luokille. Piirteillä tarkoitetaan tässä lähinnä olion *tilamuuttujia* (engl. instance variables, slots) ja niiden oletusarvoja. Olioiden käyttäytymisen määrittävät metodit, jotka periytyvät luokan määritelmän mukana.

QuickC30:ssä on onnistuttu yhdistämään oliokeskeinen ajattelu assemblyohjelmointiin. Tuloksena on syntynyt oliopohjainen assembler, jossa voidaan konekielisen koodin tehokkuuden ohella nauttia olio-ohjelmoinnin tuomista eduista, joita ovat:

- monimutkaisten tietorakenteiden ja ohjelmien selkiytyminen,
- ohjelman vaivaton ylläpito tai muuttaminen,
- ohjelmiston helppo laajennettavuus,
- ohjelmakoodin uudelleenkäytettävyys,

Periaatteessa kaikki mitä oliopohjaisella ohjelmointitekniikalla tehdään, voitaisiin toteuttaa myös perinteisillä ohjelmointimenetelmillä, mutta oliokeskeinen ohjelmointi on viime aikoina yleistynyt erityisesti yllä esitettyjen käytännöllisten näkökohtien ansiosta.

Signaalinkäsittelyyn oliokeskeinen ajattelutapa on sovellettavissa siten, että signaalit sekä suodattimet ja muut signaalinkäsittelyoperaatiot määritellään olioluokkina. Kyseiset oliot ovat yleensä rakenteeltaan muuttumattomia ja eri sovelluksissa samankaltaisia. Siksi niiden luokkamäärittelyt voidaan sisällyttää oliojärjestelmään ja käyttäjä voi tarvittaessa luoda kyseisten luokkien ilmentymiä.

7.2.2 Lisp-assembler

QuickC30:ssa signaaliprosessorin assembler on integroitu Lispin määrittelemällä assemblykieli Lispillä. C30:n assembleria on tällöin jouduttu hiukan modifioimaan. Assemblerin yhdistämistä Lispin on helpottanut Texas Instrumentsin assemblykielen ja Lisp-kielen yhteinen ominaisuus: käskyriivi muodostetaan kirjoittamalla ensin funktion nimi ja seuraavaksi sen parametrit.

Esimerkin avulla voidaan selvittää TI:n alkuperäisen assemblerin ja Lisp-assemblerin yhtäläisyyksiä ja eroja. Luvun 9,87 tallettaminen signaaliprosessorin rekisteriin R0 tapahtuu seuraavasti:

Alkuperäinen assembler:

```
LDF 9.87,R0
```

Lisp-assembler:

```
(.ldf 9.87 `r0)
```

Helposti havaittava ero käskyriivien välillä on sulkujen käyttö. Lispissä listarakenne on ohjelmakoodin ja datan yhteinen esitystapa ja sitä käytetään siksi myös Lisp-assemblerissa. Lista määritellään sulkujen avulla. TI:n assemblerissa operandit erotetaan pilkulla, mutta Lispissä välilyönti erottaa listan alkiot toisistaan.

QuickC30-ohjelmistoon on ohjelmoitu valmiiksi runsaasti signaalinkäsittelyssä ja muussa numeerisessa laskennassa tarvittavia funktioita. Ne on laadittu luomalla olioluokka, joka sisältää menetelmässä tarvittavat tietorakenteet sekä kirjoittamalla *makrometodeja* eli tietylle olioluokalle määriteltäviä funktiota, jotka laajenevat käännösvaiheessa signaaliprosessorin konekieliseksi koodiksi (Karjalainen 1992). Muun muassa tavallisimmat digitaalisuotimet (FIR ja IIR), murtoviipeen approksimoinnissa käytettävät kokopäästösuotimet (engl. allpass filters), signaalianalyysissä tarvittavat ikkunafunktiot, lineaariennustusalgoritmi (LPC) ja nopea Fourier-muunnos (engl. Fast Fourier Transform, FFT) ovat helposti käytettävissä.

7.3 Huilun mallin oliopohjainen toteutus

Huilun malli on toteutettu QuickC30-ohjelmistoa käyttäen olio-ohjelmoinnin hengessä. Malli on jaettu osakokonaisuuksiin eli moduleihin, jotka on määriteltäviä olioluokkina. Huilu on lopulta laadittu perimällä kaikkien osien luokkamääritelmät sekä luomalla kokonaisuudelle sitä ohjaava metodifunktio.

7.3.1 Luokkamäärittelyt

Alimmalla tasolla huilumallin luokkamäärittelyissä ovat modulit, joita on kuusi:

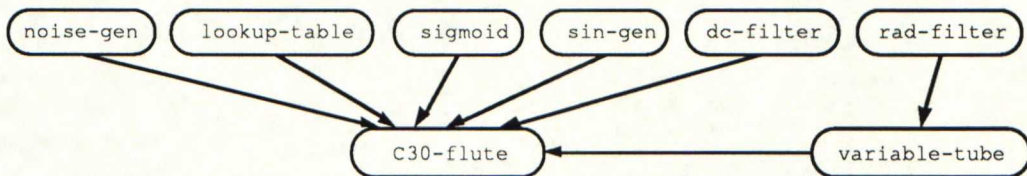
- kohinageneraattori (*noise-gen*),
- taulukko sigmoid-funktiota varten (*lookup-table*),
- sigmoid-funktio (*sigmoid*),
- sinigeneraattori vibraton generointiin (*sin-gen*)

- tasavirtakomponentin poistava suodin (dc-filter)
- heijastusfunktiota mallintava suodin (rad-filter)

Seuraavaksi on määritelty akustisen putken malli (variable-tube), jonka pituus voi muuttua. Luokka rad-filter peritään luokalle variable-tube, sillä ne ovat luonnossa erottamaton osa toisiaan.

Huilua edustaa luokka C30-flute, johon peritään kaikki edellä mainitut luokat. Lisäksi luokka C30-flute sisältää suuren määrän tilamuuttujia, joihin talletetaan kaikki parametrit: alkuarvot, vakiot ja dynaamiset muuttujat.

Kuvassa 7.1 on esitetty huilun mallin luokkien organisointi mallin oliopohjaisessa toteutuksessa. Kuvassa nuoli osoittaa perimissuuntaa. Luokka C30-flute perii kaikki luokat, mutta rad-filter periytyy ensin luokalle variable-tube, joka puolestaan periytyy luokalle C30-flute.



Kuva 7.1 Periytyminen huilun oliopohjaisessa mallissa.

7.3.2 Makrometodit

Makrometodit (engl. macro methods) ovat QuickC30:ssä metodien assemblykielisiä välineitä (Karjalainen 1992). Makrometodien määrittelyosa on samanlainen kuin CLOSin metodeissa, mutta niiden vartalo on kirjoitettu Lisp-assemblerilla. Makrometodeja kutsutaan ohjelmassa aliohjelmien tapaan, mutta käännösvaiheessa makrometodit laajenevat konekieliseksi koodiksi eikä lopullisessa signaaliprosessorin suorittamassa ohjelmassa tarvita aliohjelmahyppyjä. Siksi makrometodit suoriutuvat signaaliprosessorissa aina mahdollisimman nopeasti.

Huilumallinnusohjelman toiminnallinen osuus koostuu makrometodeista, jotka on määritelty edellä mainituille luokille. Makrometodit .noise-gen-step, .sin-gen-step ja .sigmoid suorittavat niitä kutsuneen olion yhteen näytejaksoon liittyvän laskennan ja päivittävät tilamuuttujat.

Makrometodi .variable-tube-step suorittaa putken malliin liittyvän laskennan. Laskenta aloitetaan putken loppupäästä, missä ensin päätetään pitääkö Lagrange-interpolointi suorittaa heijastusfunktion laskentaa ennen vai sen jälkeen. Viivelinjasta luetaan tilavuusnopeussignaalin arvo putken päätä vastaavassa kohdassa ja se suodatetaan alipäästösuotimella rad-filter. Suotimen lähdöstä sijoitetaan signaalinäyte mallin ulostuloon.

Assemblyohjelman ylimmällä tasolla on .flute-step, joka on määritelty luokalle C30-flute. Tämä makrometodi syntetoi yhden näytteen signaalia. Aluksi .flute-step kutsuu metodeja .variable-tube-step, .noise-gen-step ja .sin-gen-step. Tämän

jälkeen lasketaan takaisinkytkentäsilmutkaan etenevä signaali ilmasuihkun edellisen ulostulon ja putken alkupään tilavuusnopeuden summana. Saatu näyte integroidaan. Seuraavaksi suodatetaan kohinaa yhden navan alipäästösuotimella eli vuotavalla digitaalisella integraattorilla. Suotimen ulostulosta saatava kohinanäyte kerrotaan sinigeneraattorin antamalla näytteellä vibraton luomiseksi.

Putkesta takaisinkytketty signaali ja amplitudimoduloitu kohinanäyte lasketaan yhteen ja tulos syötetään viivelinjaan, joka mallittaa ilmasuihkussa etenevän poikittaisen aalto liikkeen etenemisviivettä. Viivelinjan ulostulosta otetaan näyte ja talletetaan se instanssimuuttujaan `sigmoid-input`. Seuraavaksi kutsutaan makrometodia `.sigmoid`, joka puolestaan laskee taulukkoon talletetun sigmoid-funktion arvon tulosisignaalin amplitudin perusteella. Sigmoid-funktion ulostulosta näyte syötetään tasavirran poistavaan suotimeen. Lopuksi mallin ulostulo lasketaan differentioimalla lähtöjen 1 ja 2 painotettu keskiarvo.

7.3.3 Mallin toteuttava signaalinkäsittelyjärjestelmä ja mallin ohjaus

Malli on toteutettu Texas Instrumentsin TMS320C30-signaaliprosessorilla, johon on liitetty 16-bittiset AD- sekä DA-muuntimet. Järjestelmän näytteenottotaajuus on 44,1 kHz. Periaatteessa huilun ääntä voitaisiin tällä järjestelmällä mallintaa ihmisen koko kuuloalueella eli 20 kHz:iin saakka. Käytännössä malli pyrkii kuitenkin jäljittelemään huilua noin 10 kHz:iin asti. Suuremmilla taajuuksilla aaltojohtomalli ei enää periaatteessa ole pätevä. Korkea näytetaajuus on valittu pääasiassa FIR-tyyppisen interpoloinnin takia.

Huilun laskennallinen malli toimii signaaliprosessorissa reaaliajassa prosessorin käytäessä hieman yli 50% laskentakapasiteetistaan. Malliin voidaan siten vielä lisätä runsaasti piirteitä ja silti täyttää reaaliaikaisuusvaatimus. Laskennan määrä lisääntyy esimerkiksi silloin, kun mallia halutaan soittaa joko jollakin MIDI-soittimella tai ohjelmasta käsin. Tällöin tietyistä – usein hitaasti muuttuvista – ohjausparametreista on laskettava mallin parametrien arvot jokaista näytettä varten.

Mallia voidaan tällä hetkellä ohjata usealla eri tavalla:

- soittamalla MIDI-koskettimistolla tai muulla MIDI-soittimella, jolloin MIDI-data muutetaan Macintosh-tietokoneessa matalan tason ohjauskoodiksi, joka lähetetään signaaliprosessorille,
- ohjelmoimalla musiikkikappale Macintoshissa toimivaan sekvensseriohjelmaan, jolloin MIDI-data muutetaan ja lähetetään signaaliprosessorille kuten edellä tai
- ohjelmoimalla musiikkikappale Lispillä ohjelmoidulla editorilla, joka mahdollistaa mallin kaikkien parametrien arvojen jatkuvan muuttamisen.

Kaikissa tapauksissa signaaliprosessori tuottaa ääntä reaaliajassa. Kahdessa jälkimmäisessä tapauksessa mallin ohjaus määritellään etukäteen.

8 YHTEENVETO

Edellä esitellyssä työssä on laadittu poikkihuilun laskennallinen malli, jonka avulla voidaan tuottaa korkealaatuista synteettistä huilun ääntä. Malli on verraten yksinkertainen ja se voidaan toteuttaa reaaliajassa kaupallisella signaaliprosessorilla. Mallin tuottama ääni on huomattavan luonnollinen, koska sitä laadittaessa on otettu huomioon huilun äänen-tuottomekanismin oleelliset piirteet. Erityisesti on pyritty kiinnittämään huomiota ihmisen kuulon kannalta merkittäviin seikkoihin huilun äänessä.

Tässä esitelty huilun malli on tietävästi ensimmäinen, jossa on käytetty hyväksi Smit-hin kehittämää aaltojohtomallinnuksen teoriaa. Aiemmissa huilun fysikaalisissa malleissa soittimen rungon resonanssit on mallinnettu erikseen digitaalisilla suotimilla. Malli on herättänyt mielenkiintoa ulkomaisten tutkimuslaitosten tietokonemusiikin tutkijoiden piirissä (ks. esim. Cook 1992, Link 1992).

8.1 Jatkosuunnitelmia

Mallin keskeinen ongelma on parametrien arvojen määrittäminen. Parametrejä on useita ja niiden vaikutus mallin tuottamaan ääneen ei ole kaikissa tapauksissa itsestään selvä. Jatkossa on tarkoitus laatia automaattinen laskentamenetelmä, joka määrittäisi mallin parametrien arvot huilun äänen perusteella. Menetelmän laatiminen saattaa olla varsin monimutkaista, sillä käsiteltävä järjestelmä on viiveellinen ja epälineaarinen. Lisäksi parametrejä on paljon ja joidenkin arvot muuttuvat jatkuvasti.

Toisaalta estimointiongelmaa helpottaa se, että malli on osittain lineaarinen ja staattinen. Huilun runkoa voidaan pitää lineaarisena ja putken päätyjen heijastusfunktiot voidaan määrittää tunnettujen analyysimenetelmien, esimerkiksi lineaariennustuksen (engl. linear prediction) avulla. Huilun runko ei myöskään muutu ajan mukana. Malliin sisältyvä epälineaarisuus ei onneksi ole hankalin mahdollinen, sillä siitä tiedetään etukäteen varsin paljon.

Mallin parametrien estimointimenetelmää laadittaessa täytyy ensimmäisenä kehittää sovellova virhekkriteeri, jolla arvioidaan alkuperäisen akustisen signaalin ja mallin tuottaman äänen erilaisuutta. Tuloksena saatavan äänisignaalin olisi oltava ihmisen kuulon kannalta erehdyttävän luonnollinen, joten virhekkriteeri on laadittava ottaen huomioon ihmiskorvan ominaisuudet. Näin saatua tunnuslukua voitaisiin kutsua *auditoriseksi virhekkriteeriksi*.

Työtä soitinmallien parissa voidaan myös jatkaa soveltamalla opittuja periaatteita muiden soittimien mallintamiseen. Laskennallisen mallin laatiminen on osoittautunut muiden teknillisten tutkimushankkeiden tapaan hitaasti edistyväksi työksi, jossa saavutetaan läpimurtoja äkillisten oivallusten sattuessa. Siksi tuntuukin järkevämältä keskittyä jatkossa mallintamisen teorian sekä tehokkaiden toteutustapojen kehittämiseen ja tehdä silloin tällöin kokeita uusilla soitinmalleilla.

8.2 Soitinmallien mahdollisia sovelluskohteita

Huilun ja muiden soittimien laskennallisia malleja voidaan käyttää moniin tarkoituksiin. Taloudellisesti tärkein sovellutuskohde lienevät uudet elektroniset soittimet, jotka seuraavat perinteisiä syntetisaattoreita ja sampleita. Mallipohjaista synteesiä ei vielä nykyään käytetä kaupallisissa elektronisissa soittimissa eikä tietokonemusiikkiohjelmassa, mutta ainakin yksi suuri musiikkiteknologiaa valmistava kansainvälinen yritys on ennustanut, että äänisynteesin tulevaisuus on soittimien mallinnuksessa.

Ensimmäisenä mallipohjaista äänisynteesiä käyttävät yliopistojen ja korkeakoulujen yhteydessä työskentelevät säveltäjät, jotka korvaavat soitinmalleilla akustisia soittimia. Monia nykysäveltäjiä kiinnostaa myös mahdollisuus tuottaa malleilla ennenkuulemattomia, mutta akustisesti käyttäytyviä sointeja. Tämä säveltäjien toive on helppo toteuttaa, sillä satunnaisesti tai muuten huolimattomasti valituilla parametrien arvoilla soitinmalli tuottaa kummallisia ääniä, mutta käyttäytyy silti toimintaperiaatteensa ansiosta fysikaalisesti järkevällä tavalla esimerkiksi siirtymien aikana.

Soitinmallien kehittyessä niistä saattaa tulla yleinen työväline myös akustisen musiikin säveltäjille ja sovittajille, jotka voivat mallien avulla työpöytänsä ääressä kokeilla, miltä heidän luomansa musiikki kuulostaisi oikeilla soittimilla soitettuna. Erittäin yksityiskohdalliset mallit voisivat tarjota soitinrakentajille työvälineen, jolla soittimien käytännöllisesti katsoen pysähtynyt tuotekehitys saataisiin jälleen vauhtiin.

8.3 Soitinmallinnus — signaalinkäsittelyn ja akustiikan uusi tutkimusala

Tässä työssä on omaksuttu signaalinkäsittelyhenkinen lähestymistapa soitinmallinnukseen. Seurauksena on ollut, että erityisesti mallin toteutuksessa tarvitaan samoja menetelmiä kuin muissakin signaalinkäsittelyjärjestelmissä. Esimerkiksi murtoviipeen approksiimaatiota voidaan käyttää myös puhesynteesiin tarkoitetuissa ääniväylämalleissa, digitaalisen järjestelmän näytetaajuuden muunnoksessa ja monissa muissa sovelluksissa. Näin soitinmallinnuksen voidaan havaita olevan yksi uusi signaalinkäsittelyn osa-alue, jossa saavutettavista tuloksista voidaan hyötyä myös läheisillä aloilla.

Soitinmalleja kehitettäessä joudutaan kohtaamaan kysymys: mikä saa ihmisen tunnistamaan tietyn soittimen äänen? Vastaus voidaan keksiä tutkimalla tarkasti soittimen tuottamaa äänisignaalia ja järjestämällä kuuntelukokeita mallin avulla. Tällöin voidaan myös

selvittää kuinka suuri ero estää ihmisen tunnistamasta jonkin soittimen äänen.

Kokemus soittimien mallintamisesta osoittaa, että mallia laadittaessa joudutaan perehtymään tarkasti käsiteltävän soittimen toimintaperiaatteeseen ja erityisesti huomaamaan mikä siinä on äänen kannalta oleellista. Kaikkia yksityiskohtia ei kannata jäljitellä, mikäli ne eivät aiheuta kuultavaan ääneen havaittavaa eroa. Toisaalta soittimen toiminnan teoriaa laadittaessa voidaan mallipohjaisen synteessin avulla helposti – korvakuulolta – huomata, onko todellisuutta jäljitelty oikein vaiko ei. Tällä tavoin soitinmallinnus opettaa ymmärtämään paremmin soittimien akustiikkaa.

LÄHDELUETTELO

Adrien, J. M. ja X. Rodet. 1985. Physical models of instrument: a modular approach, application to strings. *Proceedings of the 1985 International Computer Music Conference (ICMC'85)*. The Computer Music Association, s. 85–89.

Adrien, J. M., R. Causse ja E. Ducasse. 1988. Dynamic modeling of stringed and wind instruments, sound synthesis by physical models. *Proceedings of the 1988 International Computer Music Conference (ICMC'88)*. Köln, The Computer Music Association, s. 265–276.

Adrien, J. M. 1991. The missing link: modal synthesis. In: G. De Poli, A. Piccialli ja C. Roads (toim.). *Representations of Musical Signals*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, s. 267–297.

Alles, H. G. 1980. Music synthesis using real time techniques. *Proceedings of the IEEE* 68, 4, s. 436–449.

Arfib, D. 1979. Digital synthesis of complex spectra by means of multiplication of nonlinear distorted sine waves. *Journal of the Audio Engineering Society* 27, 10, s. 757–768.

Beauchamp, J. 1979. Brass-tone synthesis by spectrum evolution matching with nonlinear functions. *Computer Music Journal* 3, 2, s. 35–43. Julkaistu uudelleen in: C. Roads, J. Strawn (toim.). 1985. *Foundations of Computer Music*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press. s. 95–113.

Benade, A. H. 1960. On the mathematical theory of woodwind finger holes. *Journal of the Acoustical Society of America* 32, 12, s. 1591–1608.

Benade, A. H. 1976. *Fundamentals of Musical Acoustics*. New York, Oxford University Press. 596 s.

Beranek, L. L. 1954, 1986. *Acoustics*. Cambridge, The Acoustical Society of America.

Borin, G., G. De Poli ja A. Sarti. 1989. A modular approach to excitator-resonator interaction in physical model synthesis. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'89)*. Columbus, Ohio, The Computer Music Association, s. 46–50.

Cadoz, C., A. Luciani ja J. Florens. 1984. Responsive input devices and sound synthesis by simulation of instrumental mechanisms: the Cordis system. *Computer Music Journal* 8, 3, s. 60–73. Julkaistu uudelleen in: C. Roads (toim.). 1989. *The Music Machine*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press. s. 495–508.

Campbell, M. ja C. Greated. 1987. *The Musician's Guide to Acoustics*. London. J. M. Dent & Sons Ltd.

Chowning, J. M. 1973. The synthesis of complex audio spectra by means of frequency modulation. *Journal of the Audio Engineering society* 21, 7, s. 526–534. Julkaistu uudelleen in: C. Roads, J. Strawn (toim.). 1985. *Foundations of Computer Music*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press. s. 6–29.

- Coltman, J. W. 1968. Sounding mechanism of the flute and organ pipe. *Journal of the Acoustical Society of America* 44, 4, s. 314–323.
- Coltman, J. W. 1971. Effect of material on flute tone quality. *Journal of the Acoustical Society of America* 49, 2, s. 520–523.
- Coltman, J. W. 1976. Jet drive mechanisms in edge tones and organ pipes. *Journal of the Acoustical Society of America* 60, 3, s. 725–733.
- Coltman, J. W. 1979. Acoustical analysis of the Böhm flute. *Journal of the Acoustical Society of America* 65, 2, s. 499–506.
- Coltman, J. W. 1990. Mode stretching and harmonic generation in the flute. *Journal of the Acoustical Society of America* 88, 5, s. 2070–2073.
- Coltman, J. W. 1992a. Time domain simulation of the flute. *Journal of the Acoustical Society of America* 92, 1, s. 69–73.
- Coltman, J. W. 1992b. Jet behaviour in the flute. *Journal of the Acoustical Society of America* 92, 1, s. 74–83.
- Cook, P. R. 1992. A meta-wind-instrumentphysical model, and a meta-controller for real-time performance control. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'92)*, San Jose.
- De Poli, G. 1983. A tutorial on digital sound synthesis techniques. *Computer Music Journal* 7, 4, s. 8–26.
- Julkaistu uudelleen in: C. Roads (toim.). 1989. *The Music Machine*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press. s. 429–447.
- De Poli, G. 1984. Sound synthesis by fractional waveshaping. *Journal of the Audio Engineering Society* 32, 11, s. 849–861.
- De Poli, G., A. Piccialli ja C. Roads (toim.). 1991. *Representations of Musical Signals*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press. 478 s.
- Fant, G. 1960. *Acoustic Theory of Speech Production*. The Hague. The Netherlands. Mouton & Co.
- Fletcher, N. H. 1974. Nonlinear interactions in organ flute pipes. *Journal of the Acoustical Society of America* 56, 2, s. 328–335.
- Fletcher, N. H. 1975. Acoustic correlates of flute performance technique. *Journal of the Acoustical Society of America* 57, 1, s. 233–237.
- Fletcher, N. H. 1978. Mode locking in nonlinearly excited inharmonic musical oscillators. *Journal of the Acoustical Society of America* 64, 6, s. 1566–1569.
- Fletcher, N. H. ja L. M. Douglas. 1980. Harmonic generation in organ pipes, recorders, and flutes. *Journal of the Acoustical Society of America* 68, 3, s. 767–771.
- Fletcher, N. H., W. J. Strong ja R. K. Silk. 1982. Acoustical characterization of flute head joints. *Journal of the Acoustical Society of America* 71, 5, s. 1255–1260.

- Fletcher, N. H. ja S. Thwaites. 1983. The Physics of organ pipes. *Scientific American* 248, 1, s. 84–93.
- Fletcher, N. H. ja T. D. Rossing. 1991. *The Physics of Musical Instruments*. New York, Springer Verlag. 620 s.
- Florens, J.-L. ja C. Cadoz. 1991. The physical model: modeling and simulating the instrumental universe. In: G. De Poli, C. Roads (toim.). *Representations of Musical Signals*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, s. 227–268.
- Garnett, G. E. 1987. Modeling piano sound using waveguide digital filtering techniques. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'87)*, International Computer Music Association.
- Gordon, J. W. 1985. System architectures for computer music. *Computing Surveys* 17, 2, s. 191–233.
- Gordon, J. W. ja J. O. Smith. 1985. A sine generation algorithm for VLSI applications. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'85)*, s. 165–168.
- Hiller, L. ja P. Ruiz. 1971. Synthesizing musical sounds by solving the wave equation for vibrating objects: part I. *Journal of the Audio Engineering Society* 19, 6, s. 462–470.
- Hiller, L. ja P. Ruiz. 1971. Synthesizing musical sounds by solving the wave equation for vibrating objects: part II. *Journal of the Audio Engineering Society* 19, 7, s. 542–550.
- Hirschman, S. E. 1991. *Digital Waveguide Modeling and Simulation of Reed Woodwind Instruments*. Engineering thesis. Report No. STAN-M-72. CCRMA, Department of Music, Stanford University. 253 s.
- Jackson, L. B. 1986. *Digital Filters and Signal Processing (Second Edition)*. Boston, Kluwer, 410 s.
- Jaffe, D. A. ja J. O. Smith. 1983. Extensions of the Karplus-Strong plucked string algorithm. *Computer Music Journal* 7, 2, s. 56–69. Julkaistu uudelleen in: C. Roads (toim.). 1989. *The Music Machine*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press. s. 481–494.
- Karjalainen, M., T. Altosaar ja P. Alku. 1988. QuickSig – an object-oriented signal processing environment. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'88)*, New York.
- Karjalainen, M. 1989. A Lisp-based high-level programming environment for the TMS320C30. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'89)*, Glasgow, England.
- Karjalainen, M. 1991. DSP software integration by object-oriented programming: a case study of QuickSig. *IEEE ASSP Magazine*, April, s. 21–31.
- Karjalainen, M. ja U. K. Laine. 1991. A model for real-time synthesis of guitar on a floating-point signal processor. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'91)*, Toronto.
- Karjalainen, M., U. K. Laine, T. Laakso ja V. Välimäki. 1991. Transmission-line modeling and real-time synthesis of string and wind instruments. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'91)*, Montreal, s. 293–296.

- Karjalainen, M. 1992. Object-oriented programming of DSP processors: a case study of QuickC30. *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing (ICASSP'92)*, San Francisco.
- Karplus, K. ja A. Strong. 1983. Digital synthesis of plucked-string and drum timbres. *Computer Music Journal* 7, 2, s.43–55. Julkaistu uudelleen in: C. Roads (toim.). 1989. *The Music Machine*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press. s. 467–479.
- Keefe, D. H. 1983. Acoustic streaming, dimensional analysis of nonlinearities, and tone hole mutual interactions in woodwinds. *Journal of the Acoustical Society of America* 73,5, s. 1804–1820.
- Keene, S. E. 1989. *Object-Oriented Programming in Common Lisp – A Programmer's Guide to CLOS*. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley. 266 s.
- Kelly, J. L. ja C. C. Lochbaum. 1962. Speech synthesis. *Proceedings of the Fourth International Congress on Acoustics*, paper G42, s. 1–4. Julkaistu uudelleen in: J. L. Flanagan ja L. R. Rabiner (toim.) 1973. *Speech Synthesis*. Stoudsburg, PA, Dowden, Hutchinson & Ross. s. 127–130.
- Kinsler, L. E. ja A. R. Frey. 1950. *Fundamentals of Acoustics*. New York, John Wiley & Sons, Inc. 516 s.
- Kraniauskas, P. 1992. *Transforms in Signal and Systems*. Suffolk, Great Britain, Addison-Wesley. 558 s.
- Kreyszig, E. 1988. *Advanced Engineering Mathematics, Sixth Edition*. New York, John Wiley & Sons, Inc. 1294 s.
- Laakso, T. I. 1990. *Murtoviiveen approksimointi digitaalisilla suotimilla*. Erikoistyö opintojaksoon Tkl-89.161 Akustiikan lisensiaattiseminaari. Otaniemi. 17 s. ja kuvasivuja.
- Laakso, T. I., V. Välimäki, M. Karjalainen ja U. K. Laine. 1992. Real-time implementation techniques for a continuously variable digital delay in modeling musical instruments. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'92)*, San Jose, The Computer Music Association. s. 140–141.
- Laine, U. K. 1982. Modelling of lip radiation impedance in z-domain. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'92)*, Paris, France, s. 940–943.
- Laine, U. K. 1984. Modelling of lossy vocal tract in z-domain. Esitelmä: *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'84)*. Julkaistu 1988. Raportti n:o 30. Otaniemi, Espoo, Akustiikan laboratorio, Sähkötekniikan osasto, Teknillinen Korkeakoulu.
- Laine, U. K. 1988. Digital modeling of a variable length acoustic tube. *Proceedings of Nordic Acoustical Meeting*, Tampere, The Acoustical Society of Finland, s. 165–168.
- Le Brun, M. 1979. Digital waveshaping synthesis. *Journal of the Audio Engineering Society* 27, 4, s. 250–266.
- Liljencrantz, J. 1985. *Speech Synthesis with a Reflection-Type Line Analog*. Väitöskirja. Stockholm, Department of Speech Communication and Music Acoustics, Royal Institute of Technology.

- Link, B. 1992. A real-time waveguide toolkit. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'92)*, San Jose.
- Lyons, D. H. 1981. Resonance frequencies of the recorder (English flute). *Journal of the Acoustical Society of America* 70, 5, s. 1239–1247.
- McIntyre, M. E. ja J. Woodhouse. 1979. On the fundamentals of bowed-string dynamics. *Acustica* 43, 2, s. 93–108.
- McIntyre, M. E., R. T. Schumacher ja J. Woodhouse. 1983. On the oscillations of musical instruments. *Journal of the Acoustical Society of America* 74, 5, s. 1325–1345.
- Moore, F. R. 1990. *Elements of Computer Music*. Englewoods Cliffs, New Jersey, Prentice Hall.
- Moorer, J. A. 1976. The synthesis of complex audio spectra by means of discrete summation formulae. *Journal of the Audio Engineering Society* 24, s. 717–727.
- Moorer, J. A. 1977. Signal processing aspects of computer music – a survey. *Proceedings of the IEEE* 65, 8, s. 1108–1137. Uudistettu versio in: J. Strawn (toim.). 1985. *Digital Audio Signal Processing – An Anthology*. Los Altos, California, Kaufmann. s. 149–220.
- Nolle, A. W. 1983. Flue organ pipes: adjustments affecting steady waveform. *Journal of the Acoustical Society of America* 73, 5, s. 1821–1832.
- Otavan iso musiikkietosanakirja. 1978. Keuruu, Otava.
- Parks, T. W. ja C. S. Burrus. 1987. *Digital Filter Design*. New York, John Wiley & Sons, Inc. 342 s.
- Rabiner, L. R., R. W. Schafer. 1978. *Digital Processing of Speech Signals*. Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice-Hall.
- Roads, C. 1985. A tutorial on nonlinear distortion or waveshaping synthesis. In: C. Roads, J. Strawn (toim.). *Foundations of Computer Music*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press. s. 83–94.
- Rossing, T. D. 1982. *The Science of Sound*. Reading, Massachusetts, Addison-Wesley. 637 s.
- Sawada, Y. ja S. Sakada. 1980. On the transition between the sounding modes of a flute. *Journal of the Acoustical Society of America* 67, 5, s. 1790–1794.
- Schumacher, R. T. 1981. Ab initio calculations of the oscillations of a clarinet. *Acustica* 48, 2, s. 71–85.
- Smith, J. O. 1983. *Techniques for Digital Filter Design and System Identification with Application to the Violin*. PhD Thesis. Stanford, California. Stanford University, Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA), Department of Music. Report no. STAN-M-14.
- Smith, J. O. 1985. An introduction to digital filter theory. In: J. Strawn (toim.). 1985. *Digital Audio Signal Processing – An Anthology*. Los Altos, California, Kaufmann. s. 69–135.
- Smith, J. O. 1986. Efficient simulation of the reed-bore and bow-string mechanisms. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'86)*, The Hague.

- Smith, J. O. 1987. Waveguide filter tutorial. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'87)*, s. 9–16.
- Smith, J. O. 1991. Viewpoints on the history of digital synthesis. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'91)*, Montreal, The Computer Music Association. s. 1–10.
- Smith, J. O. 1991. Waveguide simulation of non-cylindrical acoustic tubes. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'91)*, Montreal, The Computer Music Association. s. 304–307.
- Stewart, S. E. ja W. J. Strong. 1980. Functional model of a simplified clarinet. *Journal of the Acoustical Society of America* 68, 1. s. 109–120.
- Steele, G. L. 1990. *Common Lisp: The Language, Second Edition*, Massachusetts, Digital Press.
- Sullivan, C. R. 1990. Extending the Karplus-Strong algorithm to synthesize electric guitar timbres with distortion and feedback. *Computer Music Journal* 14, 3, s. 26–37.
- Thiran, J.-P. 1971. Recursive digital filters with maximally flat group delay. *IEEE Transactions on Circuit Theory* 18, 6, s. 659–664.
- Toivanen, J. 1976. *Teknillinen akustiikka*. Espoo, Otakustantamo. 618 s.
- Välimäki, V., M. Karjalainen, Z. Jánosy ja U. K. Laine. 1992a. Real-time DSP implementation of a flute model. *Proceedings of the IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing (ICASSP'92)*, San Francisco, s. II-249 – II-252.
- Välimäki, V., T. I. Laakso, M. Karjalainen, ja U. K. Laine. 1992b. A new computational model for the clarinet. *Proceedings of the International Computer Music Conference (ICMC'92)*, San Jose, Liite.
- Wawrzynek, J. 1989. VLSI models for sound synthesis. In: M. V. Mathews ja J. Pierce (toim.) 1989. *Current Directions in Computer Music Research*. Cambridge, Massachusetts, The MIT Press, s. 113–148.

Liite A.

Interpolaattorien kertoimien päivitys

A.1 Lagrange-interpolaattorin kertoimien päivitys

Lagrange-interpolaattorin kertoimien päivitys on suhteellisen tehokasta (ks. yhtälö (4.83)). Jakolaskua ei käytännössä tarvita, sillä yhtälön (4.83) nimittäjässä ei esiinny muuttujia, vaan se on aina vakio. Kaikkien tarvittavien vakioiden käänteisluku voidaan tallettaa muistiin, jolloin N jakolaskua saadaan korvattua N :llä kertolaskulla, missä N on interpolaattorin asteluku. Yhteensä kertoimien päivittämisestä suoriudutaan $N^2 + N$ kerto- ja N yhteenlaskulla.

Esimerkiksi kolmannen asteen Lagrange-interpolaattorin ($N = 3$) kertoimet saadaan seuraavasti:

$$h(0) = -\frac{1}{6}(D-1)(D-2)(D-3) \quad (\text{A.1a})$$

$$h(1) = \frac{1}{2}D(D-2)(D-3) \quad (\text{A.1b})$$

$$h(2) = -\frac{1}{2}D(D-1)(D-3) \quad (\text{A.1c})$$

$$h(3) = \frac{1}{6}D(D-1)(D-2) \quad (\text{A.1d})$$

missä D on murtoviive. Tässä tapauksessa yhteenlaskuja (tai vähennyslaskuja) tarvitaan 3, jotta saadaan määritettyä termit $(D-1)$, $(D-2)$ ja $(D-3)$. Kertolaskuja puolestaan tarvitaan 12 kappaletta.

Kertolaskujen määrää voidaan hiukan vähentää, kun huomataan, että eri kertoimien lausekkeissa tarvitaan samoja tuloja: esimerkiksi kertolaskut $D(D-1)$ ja $(D-2)(D-3)$ voidaan laskea ensin ja käyttää näitä tuloksia kertoimien laskemisessa. Tällöin kolmannen asteen interpolaattorin kertoimet saadaan yhteensä kymmenellä kertolaskulla. Kun asteluku N on suurempi, voidaan vastaavalla tavalla tuloja tallentamalla selvittää huomattavasti alle $N^2 + N$ kertolaskulla. Esimerkiksi kun $N = 4$, voidaan ensin laskea tulot $D(D-1)$ ja $(D-4)(D-3)$ sekä niistä edelleen tulot $D(D-1)(D-2)$ ja $(D-4)(D-3)(D-2)$. Tällöin neljännen asteen interpolaattorin kertoimien laskentaan tarvitaan vain 14 kertolaskua, kun suoraviivaisessa menetelmässä niitä tarvittaisiin 20 ($= 4^2 + 4$).

A.2 Kokopäästösuotimen kertoimien päivitys

Kokopäästösuotimen kertoimien päivityksessä vaaditaan valitettavasti jakolasku, jota nykyisin käytettävät signaaliprosessorit eivät pysty laskemaan tehokkaasti. Jakolaskua on joko approksimoitava polynomilla tai on talletettava tarvittavat tulokset taulukkoon. Lisäksi on kehitetty erilaisia iteratiivisia algoritmeja jakolaskun tuloksen ratkaisemiseksi. Kaikki esitetyt menetelmät vaativat toteutuksessaan vähintään noin 20 konekielistä käskyä signaaliprosessorissa.

Kun kokopäästösuotimen kertoimet päivitetään yhtälön (4.90) mukaisesti, joudutaan yhteensä suorittamaan $2N - 1$ kertolaskua, N^2 yhteenlaskua sekä peräti N jakolaskua. Tässä on oletettu, että binomikertoimet, joissa on otettu huomioon termin $(-1)^k$ etumerkki, on talletettu etukäteen muistiin. Samanasteiseen Lagrange-interpolaattoriin nähden kokopäästösuotimen kertoimien päivitykseen kuluu siten N kertaa enemmän yhteenlaskuja, kun Lagrange-interpolaattorin päivitykseen taas kuluu N kertaa enemmän kertolaskuja. Koska kokopäästösuotimen tapauksessa tarvitaan lisäksi N jakolaskua, on kokopäästösuotimen kertoimien muuttaminen erittäin raskas tapahtuma.

Laskennan älykkään organisoinnin avulla kokopäästösuotimen kertoimien päivityksestä selvitään onneksi yhdellä jakolaskulla asteluvusta N riippumatta. Yhtälö (4.90) voidaan esittää myös muodossa:

$$a_k = b_{k,N} D_N(x) \prod_{m=k, m \neq N}^N (x + N + 1 + m) \prod_{n=0}^{k-1} (x + n) \quad (\text{A.2})$$

missä vakio $b_{k,N}$ saadaan yhtälöstä:

$$b_{k,N} = (-1)^k \binom{N}{k} \quad (\text{A.3})$$

ja nimittäjäpolynomin sisältävä termi $D_N(x)$ on seuraava:

$$D_N(x) = \left[\prod_{n=1}^N (x + N + n) \right]^{-1} \quad (\text{A.4})$$

On merkittävää, että $D_N(x)$ on sama kaikille N -asteisen kokopäästösuotimen kertoimille a_k . Siten ainoa jakolasku tarvitaan määrittäessä $D_N(x)$.

Kokopäästösuotimen kertoimien päivitys yhtälön (A.2) avulla vaatii kokonaisuudessaan $N^2 + 2N - 1$ kertolaskua, N^2 yhteenlaskua sekä yhden jakolaskun. Laskutoimitusten määrässä on oletettu, että kertoimet $b_{k,N}$ on laskettu valmiiksi. Kertolaskujen lukumäärä muodostuu seuraavasti:

- Yhtälön (A.2) mukaisesti kunkin kertoimen a_k lauseke sisältää yhtä monta tulon tekijää: $b_{k,N}$, $D_N(x)$, ensimmäisestä kertomasta $N - k$ termiä sekä toisesta k termiä. Yhteensä tulon tekijöitä on $2 + N - k + k = 2 + N$. Kuten (ei-sirkulaarisessa) aidassa on tolpanvälejä yksi vähemmän kuin tolppia, on myös tulossa yksi kertolasku vähemmän kuin tulontekijöitä, eli tässä tapauksessa yhteensä $N + 1$;

- Yhteensä kertoimia a_k on N kappaletta eli kertolaskuja kertyy $N(N + 1) = N^2 + N$.
- Lisäksi nimittäjäpolynomin $D_N(x)$ määrittämiseen vaaditaan $N - 1$ kertolaskua.

Lopputuloksena saadaan siten $N^2 + N + N - 1 = N^2 + 2N - 1$ kertolaskua.

Näytettäkään esimerkkinä kuinka kolmannen asteen kokopäästösuotimen kertoimet lasketaan käyttäen 14 kertolaskua, 9 yhteenlaskua sekä 1 jakolasku. Ensimmäin määritetään vakiokertoimet $b_{k,N}$ yhtälön (6.17) mukaisesti, kun $N = 3$:

$$b_{1,3} = (-1) \binom{3}{1} = -3, \quad b_{2,3} = (-1)^2 \binom{3}{2} = 3 \quad \text{ja} \quad b_{3,3} = (-1)^3 \binom{3}{3} = -1 \quad (\text{A.5})$$

Nämä vakiokertoimet eivät riipu murtoviipeestä x , joten ne voidaan laskea ja tallettaa ennen suodatuksen aloittamista. Nimittäjäpolynomi $D_N(x)$ saadaan yhtälöstä (6.19):

$$D_3(x) = \left[\prod_{n=1}^3 (x + 3 + n) \right]^{-1} = \frac{1}{(x + 4)(x + 5)(x + 6)} \quad (\text{A.6})$$

Lopulta voidaan laskea suodinkertoimet a_k :

$$a_1 = b_{1,3} D_3(x) (x + 5)(x + 6)x \quad (\text{A.7a})$$

$$a_2 = b_{2,3} D_3(x) (x + 6)x(x + 1) \quad (\text{A.7b})$$

$$a_3 = b_{3,3} D_3(x) x(x + 1)(x + 2) \quad (\text{A.7c})$$

Huomautettakoon, että yhtälöt (A.6) ja (A.7) on mahdollista toteuttaa yhteensä viidellä yhteenlaskulla, sillä tarvittavat termit $(x + 1)$, $(x + 2)$, $(x + 4)$, $(x + 5)$ ja $(x + 6)$ voidaan laskea aluksi ja tallettaa muistiin. Yleisesti voidaan sanoa, että näin meneteltäessä kokopäästösuotimen kertoimien muuttamisen yhteydessä tarvitaan $2N - 1$ yhteenlaskua: N yhteenlaskua tarvitaan joka tapauksessa yhtälön (A.4) toteutukseen ja lisäksi on laskettava summat $(x + i)$, missä $i = 1, 2, 3, \dots, N - 1$. Yhteensä saadaan $N + N - 1 = 2N - 1$ yhteenlaskua. Tällaisen nopean kertoimien päivityksen edellytyksenä on, että käytettävässä tietokoneessa on saatavilla riittävästi nopeaa muistia – esimerkiksi rekistereitä – joihin välitulokset voidaan tilapäisesti tallettaa.

Yhtälön (4.90) mukaan kolmannen asteen kokopäästösuotimen kertoimien lausekkeet olisivat seuraavanlaiset:

$$a_1 = -\frac{3x}{x + 4} \quad (\text{A.8a})$$

$$a_2 = \frac{3x(x + 1)}{(x + 4)(x + 5)} \quad (\text{A.8b})$$

$$a_3 = -\frac{x(x + 1)(x + 2)}{(x + 4)(x + 5)(x + 6)} \quad (\text{A.8c})$$

Kun yhtälö (A.6) sijoitetaan yhtälöihin (A.7) ja sievennetään, huomataan, että lausekkeet (A.7) ja (A.8) ovat samat, kuten tietysti pitääkin.

Liite B.

Huilun laskennallisessa mallissa tarvittavia digitaalisuotimia

B.1 Aikadiskreetti differentiaattori

Differentiaattori on elin, joka tuottaa argumenttinsa derivaatan. Funktion f derivaatta ajan t suhteen on määritelty seuraavasti:

$$\frac{df(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (\text{B.1})$$

Differentiaattoria voidaan diskreettiaikaisessa laskennassa approksimoida esimerkiksi seuraavasti:

$$\frac{df(t)}{dt} \approx \frac{f[(n+1)T] - f(nT)}{T} \quad (\text{B.2})$$

missä T on diskreettiaikaisen järjestelmän näyteväli eli näytteenottotaajuuden käänteisluku. Yhtälön (B.2) esittämä derivaatan approksimaatio toteutetaan käytännössä seuraavanlaisena ensimmäisen asteen FIR-suotimena, jota kutsutaan usein digitaaliseksi differentiaattoriksi:

$$y(n) = \frac{1}{2} [x(n) - x(n-1)] \quad (\text{B.3})$$

missä $x(n)$ on aikadiskreetti tulosignaali ja $y(n)$ sen derivaattaa approksimoiva lukujono. Suotimen amplitudivasteen maksimi on skaalattu ykköseksi painokertoimen $1/2$ avulla.

Taajuusalueessa ideaalinen differentiaattori on seuraavanlainen:

$$H(\omega) = \frac{j\omega}{2\pi} \quad (\text{B.4})$$

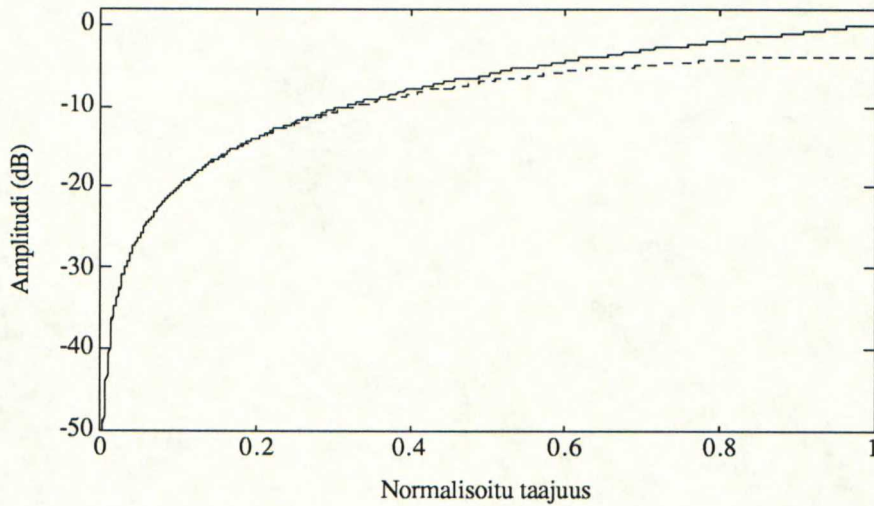
Taajuusvasteella on yksi nollakohta, joka sijaitsee kulmataajuudella $\omega = 0$. Differentiaattori on siten *ylipäästösuodin*, jonka amplitudivaste nousee 20 desibeliä dekadilla eli noin 6 dB oktaavilla. Huomautettakoon, että taajuusvastefunktio (B.4) on puhtaasti imaginaarinen eli derivoinnin yhteydessä signaalin vaihe kiertyy 90° . Yhtälön (B.3) mukaisen ensimmäisen asteen approksimaation taajuusvaste on puolestaan:

$$H(\omega) = \frac{1}{2} (1 - e^{-j\omega T}) = \sin^2\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \frac{j}{2} \sin(\omega T) \quad (\text{B.5})$$

josta saadaan seuraava amplitudivaste:

$$|H(\omega)| = \sin\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad (\text{B.6})$$

Approksimaation amplitudivaste vastaa ideaalista differentiaattoria varsin hyvin pienillä taajuuksilla, mutta virhe suurenee taajuuden kasvaessa. Suurilla taajuuksilla approksimaatiivisen differentiaattorin amplitudivaste tasoittuu siten, että Nyqvist-taajuudella amplitudivasteen derivaatta on nolla. Kuvassa B.1 esitetään sekä ideaalisen differentiaattorin että approksimaation amplitudivaste. Approksimaation amplitudivastetta on vaimennettu 3,9 dB, jotta nähdään kuinka se sovituu pienillä taajuuksilla ideaaliseen vasteeseen.



Kuva B.1 Ideaalisen differentiaattorin ja sen diskreettiaikaisen ensimmäisen asteen approksimaation amplitudivasteen vertailu. Vertailun helpottamiseksi approksimaation vastetta (katkoviiva) on vaimennettu 3,9 dB.

B.2 Aikadiskreetti integraattori

Integrointi on derivoinnin ohella toinen tärkeä matemaattinen operaatio, jota tarvitaan usein myös digitaalisessa signaalinkäsittelyssä. Kyseeseen tulee lähinnä liukuva integraali (engl. running integral), jossa integroidaan nykyhetkeen t_0 saakka:

$$y(t) = \int_0^{t_0} x(t) dt \quad (\text{B.7})$$

Diskreettiaikaisessa laskennassa integraali muuttuu summaukseksi:

$$y(n) = \sum_{k=0}^n x(k) \quad (\text{B.8})$$

Vastaavan diskreettiaikaisen suotimen siirtofunktio saadaan integraattorin impulssivasteen eli yksikköaskelfunktion $u(n)$ z-muunnoksena:

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (\text{B.9})$$

Aikadiskreetin integraattorin differenssiyhtälö on:

$$y(n) = x(n) + y(n-1) \quad (\text{B.10})$$

Analogisen integraattorin (B.7) taajuusvaste voidaan lausua Fourier-muunnoksen avulla seuraavasti:

$$H(\omega) = -\frac{j2\pi}{\omega} \quad (\text{B.11})$$

Integraattori on *alipäästösuodin*. Sen amplitudivaste on kääntäen verrannollinen taajuuteen f , eli vaste laskee 20 desibeliä dekadilla tai toisin sanoen likimain 6 dB oktaavilla. Taajuusvaste (B.11) on puhtaasti imaginaarinen ja aiheuttaa -90° asteen vaiheenkierron.

Ideaalisen aikadiskreetin integraattorin käytössä saattaa ilmetä stabiilisuuteen liittyviä ongelmia, koska siirtofunktion (B.9) napa sijaitsee z -tason yksikköympyrällä kohdassa $z = 1$ eli taajuudella 0 Hz. Seurauksena on, että digitaaliseen integraattoriin syötetty vakiosignaali ei koskaan vaimene, vaan näkyy lähdössä ikuisesti. Mikäli tulossignaali sisältää voimakkaan vakiokomponentin, saattaa integraattorin ulostulo tällöin ajautua lukualueen laitaan aiheuttaen ylivuodon. Tilanne on helppo korjata siirtämällä napaa hiukan yksikköympyrän sisäpuolelle. Tällaisen *vuotavan integraattorin* siirtofunktio on sama kuin ensimmäisen asteen IIR-suotimen, josta puuttuu myötäkytkentä:

$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}} \quad (\text{B.12})$$

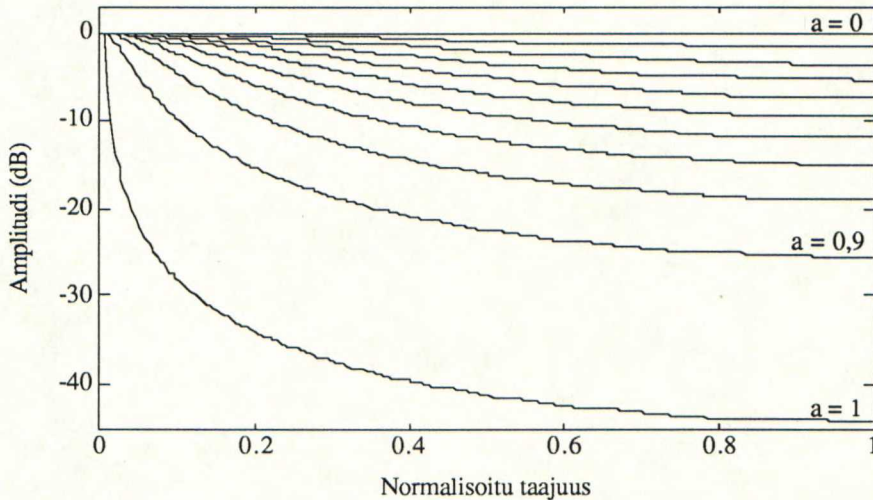
missä $a = 1 - \varepsilon < 1$ ja ε on pieni positiiviluku. Kun $a < 1$, on integraattorin amplitudivaste pienillä taajuuksilla tasainen ja alkaa laskea likimain 6 dB oktaavilla kertoimen a määräämästä rajataajuudesta lähtien. Seuraavassa tarkastellaan yleisemmin yhtälön (B.12) esittämää suodinta.

B.3 Ensimmäisen asteen IIR-suodin

Huilun laskennallisessa mallissa käytetään kahdessa yhteydessä ensimmäisen asteen IIR-suodinta, josta puuttuu myötäkytkentä (engl. all-pole filter): integraattorina ilma-suihkun mallissa sekä mallintamaan putken rajakerroksessa tapahtuvia häviöitä. Suotimen z -tason siirtofunktio on yhtälön (B.12) mukainen. Häviöitä mallintavan suotimen on oltava alipäästösuodin, jolloin suodinkerroin a voi saada arvoja väliltä $[0, 1]$. Suotimen taajuusvaste on seuraavanlainen:

$$H(\omega) = \frac{1 - a \cos(\omega T) - ja \sin(\omega T)}{1 + a^2 + 2a \cos(\omega T)} \quad (\text{B.13})$$

Kuvassa B.2 esitetään taajuusvasteen itseisarvo eli amplitudivaste kertoimen a funktiona.



Kuva B.2 Ensimmäisen asteen IIR-suotimen amplitudivaste kertoimen a funktiona. Kuvaajat on saatu muuttamalla kerrointa a 0,1:n askelin. Alin kuvaaja on diskreettiai-kaisen integraattorin amplitudivaste.

Suotimen vahvistus muuttuu kerrointa a muutettaessa, ja siksi on paikallaan kompensoida muutos painokertoimella. Tavallisesti halutaan säilyttää suotimen DC-vahvistus vakiona. DC-vahvistus saadaan siirtofunktiosta (B.12) arvolla $z = 1$:

$$H(1) = \frac{1}{1-a}, \quad a \neq 1 \quad (\text{B.14})$$

Vahvistuksen muutos voidaan siten kompensoida kertomalla siirtofunktio termillä $1-a$. Skaalattua ensimmäisen asteen IIR-suodinta kuvaava differenssiyhtälö on seuraavanlainen:

$$y(n) = (1-a)x(n) + ay(n-1) \quad (\text{B.15})$$

missä $a \neq 1$, toisin sanoen kyseinen skaalaus ei sovellu ideaaliselle aikadiskreetille integraattorille.

Häviöitä mallintavan IIR-alipäästösuotimen yhteydessä harmia aiheuttaa suotimen vaiheviive. Pienillä taajuuksilla vaiheviive vaihtelee voimakkaasti suodinkertoimen a funktiona. Kun tällainen suodin liitetään aaltojohtomalliin, ei viivelinjan efektiivinen pituus ole sama kuin viivelinjan sisältämien yksikköviipeiden ja interpolaattorin yhteisvaikutus, vaan jonkin verran pitempi. Jotta huilun malli pysyisi vireessä suodinkerrointa muutettaessa, olisi suotimen aiheuttama viive otettava huomioon laskettaessa viivelinjan pituus.

Suotimen *vaihevaste* saadaan taajuusvasteesta (B.14) seuraavasti:

$$\theta(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}[H(\omega)]}{\text{Re}[H(\omega)]} \right\} = \arctan \left\{ \frac{-ja \sin(\omega T)}{1 - a \cos(\omega T)} \right\} \quad (\text{B.16})$$

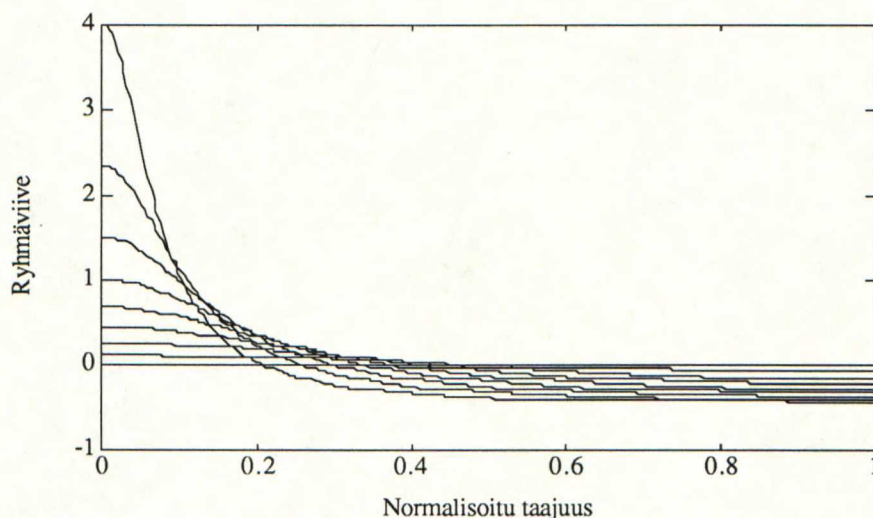
Vaiheviive lasketaan yhtälön (4.87) mukaisesti derivoimalla vaihevaste ja vaihtamalla tuloksen etumerkki:

$$\tau_p(\omega) = -\frac{\theta(\omega)}{\omega} = -\frac{1}{\omega} \arctan \left\{ \frac{-ja \sin(\omega T)}{1 - a \cos(\omega T)} \right\} \quad (\text{B.17})$$

Ryhmäviipeen lauseke on saadaan puolestaan määritelmän (4.88) mukaisesti vaihevas-
teen derivaatan avulla:

$$\tau_g(\omega) = -\frac{d\theta(\omega)}{d\omega} = \frac{a \cos(\omega T) - a^2}{1 - 2a \cos(\omega T) + a^2} T \quad (\text{B.18})$$

Kuvassa B.3 nähdään suotimen ryhmäviive taajuuden funktiona kertoimen a eri arvoilla. Huomataan, että suodin aiheuttaa suuremman viipeen pienillä taajuuksilla kuin suurilla.



Kuva B.3 Ensimmäisen asteen IIR-suotimen ryhmäviive kertoimen a eri arvoilla. Kuvaajat on saatu muuttamalla kerrointa a $0,1:n$ askelin. Suora, jolla vaiheviipeen arvo on nolla saadaan kertoimella $a = 0$ ja ylin käyrä kun $a = 0,8$.

Suotimen aiheuttaman viipeen vaikutus on huomattavin, kun viivelinja on lyhyt eli

perustaajuus korkea. Tällöin suotimen viive on suuruudeltaan merkittävä viivelinjan pituuteen nähden. Malli on siten vakavasti alavireinen korkealta soitettaessa, mikäli suotimen vaiheviivettä ei kompensoida.

Mallin viritykseen vaikuttaa erityisesti ryhmäviipeen (tai vaiheviipeen) arvo soittimen perustaajuudella eli suhteellisen pienillä taajuuksilla. Yksinkertainen approksimaatio ryhmäviipeen arvolle saadaan, kun ratkaistaan ryhmäviipeen lauseke (B.18) taajuudella 0 Hz:

$$\tau_g(0) = \frac{a}{1-a} T \quad (\text{B.19})$$

Approksimaatio on käyttökelpoinen näytetaajuuteen nähden pienillä taajuuksilla. Kun a on pieni, on virhe todelliseen verrattuna vähäinen hiukan suuremmillakin taajuuksilla. Mallin viritystä ajatellen kiinnostava taajuusalue on noin 1 - 10% Nyqvist-taajuudesta, kun näytetaajuus on 44,1 kHz. Tällä taajuusalueella yhtälön (B.19) mukainen ryhmäviipeen approksimaatio kelpaa vain kun $a \leq 0,5$. Käytännössä halutaan kuitenkin käyttää myös suurempia a :n arvoja, joten näin yksinkertainen approksimaatio ei aina ole tarpeeksi hyvä.

Liite C.

Kohinan ja siniaallon tuottaminen

C.1 Kohinan generointi

Kohina on oleellinen osa huilun ääntä. Laskennallisessa mallissa kohinaa lisätään herätteeseen ennen epälineaarisuutta, jotta syntetoidussa äänessä olisi mukana epälineaarisuuden moduloimia kohinapulsseja.

Digitaalinen kohina koostuu satunnaisluvuista. Täydellisen satunnaisia lukuja ei laskennallisesti pystytä tuottamaan tietokoneen deterministisen luonteen vuoksi. Sen sijaan voidaan laskea lukuja, jotka vastaavat tilastollisilta ominaisuuksiltaan satunnaislukuja. Niitä kutsutaan *valesatunnaisiksi luvuiksi* (engl. pseudo random number). Seuraavaksi esitellään Unto K. Laineen keksimä yksinkertainen menetelmä, joka soveltuu valesatunnaisten lukujen tuottamiseen signaaliprosessorilla.

Laine on 1980-luvun lopulla keksinyt yksinkertaisen algoritmin¹, joka on helppo toteuttaa signaaliprosessorilla. Menetelmä perustuu useiden signaaliprosessoreiden käsikannassa olevaan ehdolliseen vähennyslaskukäskyyn (SUBC) ja se tuottaa kaksi toisistaan riippumatonta satunnaislukujonoa saman aikaisesti. Algoritmiin liittyy kaksi tilamuuttujaa, x ja y , sekä yksi vakio z . Algoritmin yksi askel muuttaa molempia muuttujia. Kummankin muuttujan muodostama aikasarja on tasajakautunut kohinasekvenssi.

Laineen menetelmässä hyödynnetty *ehdollinen vähennyslasku* on alunperin tarkoitettu helpottamaan kokonaislukujen jakolaskun toteuttamista (Texas Instruments 1988). Kyseessä ei ole tavanomainen ainoastaan yhden operaation suorittava konekielikäsky, sillä ehdollinen vähennyslasku sisältää nimensä mukaisesti ehdon ja siitä riippuvan haarautumisen. Ehdollinen vähennyslasku voidaan esittää formaalisti seuraavalla tavalla (Texas Instruments 1988):

```
IF (dst - src) ≥ 0
    dst := 2*(dst - src) OR 1
ELSE dst := 2*dst
```

Ehdollisessa vähennyslaskussa kohderekisteriin dst talletettava luku riippuu vähennyslaskun $dst - src$ tuloksesta. Jos erotus on nolla tai positiivinen, siirretään erotusta yksi bittipaikka vasemmalle (eli kerrotaan kahdella) ja näin saadun luvun vähiten merkittävään bittiin asetetaan tai-operaation avulla 1. Lopputulos talletetaan rekisteriin dst . Mikäli erotus on negatiivinen, siirretään kohderekisterin dst sisältöä yksi bittipaikka

¹ Unto K. Laineen nerokasta kohina-algoritmia ei ole vielä julkaistu, eikä hän halua menetelmän toteuttavaa koodia esittävän tässä.

vasemmalle. Tällöin erotusta $dst - src$ ei käytetä mihinkään.

Laineen kehittämä kohinaa tuottava algoritmi on tehokas erityisesti siksi, että siinä ei tarvita ainoatakaan haarautumista tai jakolaskua. Ehdollinen vähennyslasku toteuttaa pääosan tarvittavasta lukujen manipuloinnista. Algoritmissa onkin SUBC:n lisäksi vain muutama käsky, joilla tilamuuttujia vielä manipuloidaan.

C.2 Sinisignaalin synteesi

Tietokonemusiikissa tarvitaan useissa yhteyksissä sinimuotoista signaalia. Esimerkiksi amplitudimoduloinnissa, FM-synteesissä sekä additiivisessa synteesissä sille on käyttöä. Amplitudimodulaatiota käytetään muun muassa tuottamaan *vibratoa*. Myös tässä työssä esitellyn huilun mallin ääntä voidaan merkittävästi elävöittää lisäämällä vibrato, joka saadaan aikaan kertomalla herätettä sinimuotoisella pientaajuisella signaalilla.

Sinifunktio voidaan laskennallisesti toteuttaa usealla eri tavalla. Mikäli laskenta-algoritmissa tarvitaan vain yksittäisiä sinifunktion arvoja, voidaan soveltaa funktioiden approksimointiin käytettäviä menetelmiä, kuten *polynomiapproksimaatiota*, *taulukko-hakua* tai *iteratiivista approksimaatiota*. Sinifunktiota approksimoiva polynomi saadaan esimerkiksi katkaisemalla sinifunktion Taylor-sarja tai sovittamalla sinifunktioon tietyllä välillä jokin matala-asteinen polynomi. Taulukkomenetelmässä talletetaan sinifunktion arvoja yleensä tasavälein. Taulukkoa luettaessa argumentin arvo on tällöin vain erikoistapauksessa sama kuin jokin talletetuista pisteistä. Argumentin sattuessa kahden näytekohdan välille saadaan approksimaatio funktion arvolle esimerkiksi lineaarisella interpoloinnilla.

Tietokonemusiikkikäytössä tarvitaan useimmiten sinisignaalia, eli lukujonoa $\sin(\omega nT)$, missä ω on kulmataajuus, indeksi $n = 0, 1, 2, \dots$ ja T näyteväli. Jatkuvaa sinisignaalia vastaava lukujono voidaan syntetoida *rekursiivisilla menetelmillä*, joissa tilamuuttujien avulla lasketaan seuraava näyte. Seuraavaksi esitellään siniaallon generointiin soveltuva rekursiivinen algoritmi.

Siniaaltoa voidaan tuottaa helposti toisen asteen rekursiivisella suotimella eli *digitaalisen resonaattorilla*, jonka navat sijaitsevat z -tasossa yksikköympyrällä. Tällaista sinigeneraattoria kutsutaan *asymptoottisesti epästabiiliksi* digitaaliseksi resonaattoriksi. Kun siihen syötetään esimerkiksi impulssi, saadaan ideaalisessa tapauksessa (eli äärettömällä laskentatarkkuudella) tuloksena päättymätön sinimuotoinen lähtösignaali.

Toisen asteen rekursiivisen suotimen siirtofunktio on

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}} \quad (C.1)$$

Siirtofunktio voidaan esittää myös napojen p_1 ja p_2 avulla:

$$H(z) = \frac{z^2}{(z - p_1)(z - p_2)} \quad (C.2)$$

Toisen asteen rekursiivisen suotimen navat ovat toistensa kompleksikonjugaatteja, eli

$$p_1 = p_2^* \quad (\text{C.3})$$

Täten siirtofunktio voidaan lausua toisen navan avulla:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2 \operatorname{Re}(p_1) z^{-1} + \{[\operatorname{Re}(p_1)]^2 + [\operatorname{Im}(p_1)]^2\} z^{-2}} \quad (\text{C.4})$$

Napojen p_1 ja p_2 reaali- ja imaginaariosa ovat seuraavat:

$$\operatorname{Re}(p_1) = \operatorname{Re}(p_2) = r \cos(\omega) \quad (\text{C.5})$$

$$\operatorname{Im}(p_1) = -\operatorname{Im}(p_2) = r \sin(\omega) \quad (\text{C.6})$$

missä ω on navan kulmataajuus eli kulma nollataajuudesta lukien ($0 \leq \omega \leq \pi$) ja r navan etäisyys z -tason origosta ($r > 0$ aina). Suodin on stabiili, kun $r < 1$ eli navat ovat yksikköympyrän sisäpuolella. Kun yhtälöt (C.5) ja (C.6) sijoitetaan yhtälöön (C.4) saadaan digitaalisen resonaattorin siirtofunktiolle lopullinen yleinen muoto:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2 r \cos(\omega) z^{-1} + r^2 z^{-2}} \quad (\text{C.7})$$

Erikoistapauksena on helppo ratkaista asymptoottisesti epästabiilin digitaalisen resonaattorin eli sinioskillaattorin siirtofunktio. Koska navat p_1 ja p_2 ovat tässä tapauksessa yksikköympyrällä, on $r = 1$ ja siirtofunktio seuraava:

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2 \cos(\omega) z^{-1} + z^{-2}} \quad (\text{C.8})$$

Siniaaltogeneraattori voidaan siten toteuttaa seuraavalla differenssiyhtälöllä:

$$y(n) = x(n) + a y(n-1) - y(n-2) \quad (\text{C.9})$$

missä vakiokerroin $a = 2 \cos(\omega)$.

Kun kyseiseen asymptoottisesti epästabiiliin suotimeen syötetään ensimmäisen keran jokin heräte ($\neq 0$), alkaa suodin värähdellä sinimuotoisesti kertoimen a määräämällä taajuudella. Värähtelyn amplitudi riippuu herätteestä. Kun suotimeen syötetään esimerkiksi yksikköimpulssi, saadaan värähtelyamplitudiksi $\sin(\omega)$ (Gordon ja Smith 1985).

Jos laskentatarkkuus on vähäinen, saattaa asymptoottisesti epästabiilin digitaalisen resonaattorin värähtelytaajuus pyöristyä ja aiheuttaa huomattavan virheen. Liukulukuprosessoria käytettäessä ongelmia ei käytännössä ole, vaan tuloksena on stabiili ja taajuusresoluutioltaan varsin tarkka sinisignaali.